PROJET DE COURS DE M2R

MICHEL BRION, SARA CHECCOLI, GREG MCSHANE, TANGUY RIVOAL, AND JULIEN ROQUES

Sommaire

1. Introduction

Ce projet de parcours M2R est articulé de la façon suivante :

- Cours fondamentaux :
  - Introduction aux groupes algébriques linéaires - Michel Brion.
  - Théorie algébrique des nombres et théorie de Galois - Sara Checcoli.
  - Introduction aux équations différentielles et à leur théorie de Galois - Julien Roques.
- Cours avancés :
  - Properties of algebraic flows - Greg McShane.
  - Approximation diophantienne des valeurs de fonctions spéciales - Tanguy Rivoal.

Voici une description détaillée de chacun de ces cours.

2. Contenu des cours

2.1. **Cours fondamental - Introduction aux groupes algébriques linéaires - Michel Brion.** Les groupes algébriques linéaires forment une vaste généralisation des groupes classiques. Ils apparaissent dans des domaines variés : algèbre (théorie de Galois différentielle), géométrie algébrique (problèmes de classification), théorie des nombres (groupes arithmétiques),... L'objet du cours est d'étudier la structure des groupes algébriques linéaires sur un corps algébriquement clos. Cela met en jeu des notions de géométrie algébrique qui seront introduites dans le cours et illustrées par de nombreux exemples.

Programme (provisoire) :

(1) Géométrie algébrique : topologie de Zariski, variétés affines, produits, dimension, variétés quasi-projectives, morphismes.
(2) Premières propriétés des groupes algébriques : exemples, actions, orbites, composante neutre. Groupes algébriques linéaires : décomposition de Jordan, représentations.
(3) Groupes algébriques commutatifs : structure, groupes diagonalisables, tores, groupes unipotents.
(4) Algébres de Lie : dérivations, différentielles, variétés algébriques lisses. L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique linéaire.
(5) Espaces homogènes de groupes algébriques linéaires : morphismes ouverts, morphismes finis, normalité. Espaces homogènes, quotients.
(6) Groupes algébriques résolubles connexes : structure, théorème du point fixe de Borel. Sous-groupes de Borel et tores maximaux des groupes algébriques linéaires.
(7) Groupes réductifs, groupes semi-simples : structure (si le temps le permet).

Références :

- A. Borel, Linear Algebraic Groups. Second enlarged edition, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer, 1991.
- J. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics 21, Springer, 1991.
- A. Onishchik, E. B. Vinberg, Lie Groups and Algebraic Groups, Springer, 1990.
- T. A. Springer, Linear Algebraic Groups. Second edition, Progress in Mathematics 9, Birkhäuser, 1998.
- T. Szamuely, Lectures on linear algebraic groups, https://www.renyi.hu/ szamuely/lag.pdf

2.2. **Cours fondamental - Théorie algébrique des nombres et théorie de Galois - Sara Checcoli.** Le cours a comme objectif l'étude des corps des nombres, des corps p-adiques et de la théorie de Galois.

Programme (provisoire):

(1) Extensions algébriques et finies des corps, clôture algébrique. Corps de nombres: structure, anneaux des entiers et ideaux premiers. Normes, traces, discriminants.
(2) Théorie de Galois : extensions normales, séparables, inséparables, purement inséparables, théorème de l'élément primitif. Extensions Galoisiennes et théorème fondamentale de la théorie de Galois. Problème inverse de Galois et exemples : extensions avec groupe de Galois 'petit' ; extensions cyclotomiques ; réalisation du groupe symétrique. Théorie de Kummer et théorème de Kronecker-Weber. Trace et norme, extensions cycliques et Théorème 90 de Hilbert. Résolubilité par radicaux et groupes résolubles.
(3) Valeurs absolues sur un corps de nombres et topologies induites. Théorème d'Ostrowski. Complétés d'un corps de nombres par rapport à ses valeurs absolues. Corps p-adiques : degrés locaux, normes locaux, Lemme de Krasner. Classification des extensions non ramifiées et modérément ramifiées d'un corps p-adique. Ramification sauvage. Extensions Galoisiennes des corps p-adiques et leur structure. Groupes de décompositions et groupes de Galois locaux. Groupes de ramifications : structure et sauts. Théorème de densité de Chebotarev et applications.
(4) Si le temps le permet: théorie de Galois infinie : groupes topologiques (rappels), limites projectives ; groupes profinis et topologie de Krull. Théorie de Galois pour les extension infinies, groupe de Galois absolu. Calcul de certains groupes de Galois infinis.

Références:

- J.W.S. Cassels and A. Fröhlich (eds.), Algebraic Number Theory, Academic Press 1967.
- S. Lang, Algebra, 3rd Edition, Addison Wesley, 1993.
- S. Lang, Algebraic Number Theory, 2nd Edition, Springer Verlag 1994.
- W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Springer Monographs in Mathematics (3 ed.), Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- J.-P. Serre, Topics in Galois Theory, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- J-P. Serre, Local fields, Springer Verlag 1979.

Prérequis : Théorie des groupes finis.

2.3. **Cours fondamental - Introduction aux équations différentielles et à leur théorie de Galois - Julien Roques.** Ce cours est une introduction à la théorie des équations différentielles linéaires. Nous aborderons principalement leurs aspects algébriques et analytiques. L'objectif principal est de définir et d'étudier les groupes de Galois différentiels (ils reflètent les relations algébriques entre les solutions des équations différentielles et leurs dérivées). Nous aborderons les sujets suivants, dans la limite du temps disponible.

(1) Algèbre différentielle (anneaux et corps différentiels; idéaux différentiels; modules, systèmes et équations différentiels; constructions sur les modules différentiels; théorème du vecteur cyclique).
(2) Anneaux et extensions de Picard-Vessiot (existence; unicité; propriétés générales; caractérisations). On commencera par le cas des équations différentielles à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{C}$ et le théorème de Cauchy holomorphe.
(3) Groupes de Galois différentiel (définition; le groupe de Galois différentiel est un groupe algébrique linéaire; correspondance de Galois). Une introduction préalable aux variétés algébriques affines et aux groupes algébriques linéaires sera nécessaire.
(4) Solutions Liouvilliennes. Algorithme de Kovacic.
(5) Théorie locale formelle (polygone de Newton; classification formelle; équations singulières régulières).
(6) Monodromie et groupe de Galois différentiel (théorème de Schlesinger; quelques mots sur la phénomène de Stokes et le théorème de Ramis).
(7) Introduction au point de vue tannakien.

Références:

- Galois Theory of Linear Differential Equations, M. Singer et M. van der Put, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 328, Springer, 2003.
- Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations, M. Singer, Algebraic Theory of Differential Equations, M.A.H. MacCallum and A.V. Mikhalov, eds., London Mathematical Society Lecture Note Series (no. 357), Cambridge University Press, 2009, 1-82.
- Algebraic Groups and Differential Galois Theory, Teresa Crespo and Zbigniew Hajto, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 122, AMS.
- Differential Galois Theory, F. Beukers, From Number Theory to Physics, pp 413-439, Springer Berlin Heidelberg.

2.4. **Cours avancé - Properties of algebraic flows - Greg McShane.** Algebraic flows, and more generally flows defined on homogeneous spaces of (real) Lie groups, have been studied for more than a hundred years with many important advances over the last four decades. There are interesting applications in various areas, especially :

- Diophantine approximation;
- counting lattice points;
- representations of numbers by real quadratic forms in several variables.

A lattice is a discrete subgroup of a Lie group with finite volume quotient. Associated to the Lie group is a homogeneous space (*e.g.* the hyperbolic plane for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) and we study the flows on the tangent bundle of the quotient of this space by a lattice.

There are two important examples of flow which we will study in this course:

- the geodesic flow on a homogeneous spaces (typically a surface);
- the horocylic flow and more generally unipotent flows.

The fundamental results were proved by Hopf in the case of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in the 1930s, Mackey in 1950s, Margulis and Furstenberg in the 1970s and Ratner through the 90s. More recently, Benoist and Quint have developed a powerful theory for classifying orbits.

The main problem is to understand the structure of the orbits of these flows and this leads to the classification of the space of invariant measures.

Programme (provisoire):
The course will cover for compact homogeneous spaces (hyperbolic manifolds) :

(1) the (unique) ergodicity of the aforementioned flows;
(2) mixing and decay of matrix coefficients;
(3) applications to counting lattice points (Eskin-McMullen/Margulis).
(4) If the time allows, we will discuss :
    - Ratner's Theorem and the Oppenheim conjecture;
    - counting for lattices with non compact quotient spaces.

Références:

- Examples of unique ergodicity of algebraic flows, Jean-François Quint, `https://www.math.u-bordeaux.fr/~jquint/publications/courschine.pdf`

Prérequis : Structure of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: Iwasa decomposition, Cartan decomposition, Haar measure, Unitary representations.

2.5. **Cours avancé - Approximation diophantienne des valeurs de fonctions spéciales - Tanguy Rivoal.** Nous nous intéresserons dans ce cours à l'approximation diophantienne des valeurs prises par certaines fonctions spéciales. Il s'agit de savoir quand une telle fonction prend une valeur irrationnelle (voire transcendante) en un point rationnel ou algébrique. Grosso modo, une fonction spéciale est une série entière solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, ou plus généralement une équation fonctionnelle linéaire. Les exemples les plus classiques de fonctions spéciales sont les séries hypergéométriques, parmi lesquelles on distingue $\exp(z)$ et $\log(1+z)$.

Dans une première partie du cours, on s'intéressera aux constructions "explicites" basées sur l'approximations de Hermite-Padé. Elles permettront de montrer par exemple que $\exp(\alpha)$ est un nombre transcendant (c'est-à-dire non-algébrique) pour tout nombre algébrique α non-nul, dont on déduit la transcendance de $\log(\alpha)$ pour tout nombre algébrique α non-nul et différent de 1. On appliquera également ce type de construction aux fonctions polylogarithmes $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^s$, qui généralisent $\log(1-z)$, et on donnera quelques corollaires concernant la fonction zêta de Riemann (tels que l'irrationalité de $\zeta(3)$).

Dans une deuxième partie du cours, on s'attachera à généraliser les théorèmes précédents à des classes plus vastes de fonctions. On introduira à cet effet les E-fonctions (généralisation de $\exp(z)$) et les G-fonctions (généralisation de $\log(1+z)$) ; les constructions, basées sur le lemme de Siegel, seront alors "inexplicites". On verra que les équations différentielles satisfaites par ces fonctions s'avèrent essentielles, et que les résultats diophantiens sont fondamentalement très différents d'une classe à l'autre.

Enfin, selon le temps disponible, on s'attachera à l'étude diophantienne des valeurs des fonctions mahlériennes. Ces fonctions vérifient une équation fonctionnelle de la forme $\sum_{j=0}^{d} a_j(z)F(z^{k^j}) = 0$ avec $a_j(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Un exemple classique est $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{k^n}$ ($k \geq 2$ entier) qui vérifie $F(z^k) = F(z) - z$ et dont on montrera qu'elle prend des valeurs transcendantes en tout point z algébrique tel que $0 < |z| < 1$. Plus généralement, on montrera un théorème, dû à Mahler, sur la transcendance des valeurs de ces fonctions, où les équations fonctionnelles jouent un rôle fondamental analogue aux équations différentielles pour les E et G-fonctions.

Programme (provisoire):

(1) Généralités sur l'approximation diophantienne.
(2) Transcendance aux points algébriques des valeurs de fonctions classiques telles que $\exp(z)$ et $\log(z)$.
(3) Indépendance linéaires des valeurs de polylogarithmes, et applications aux valeurs de la fonction zêta de Riemann.
(4) Théorème de Gel'fond-Schneider.
(5) Le théorème de Siegel-Shidlovky sur les E-fonctions.
(6) Le théorème des Chudnovsky sur les G-fonctions.
(7) Le théorème de Mahler sur les fonctions mahlériennes.

Références:

- A. Shidlovskii, *Transcendental Numbers*, Studies in Math 12, de Gruyter, 1987.
- K. Nishioka, *Mahler Functions and Transcendence*, Lecture Notes in Mathematics 1631, 1996.

Prérequis : Pour suivre ce cours, il sera utile d'avoir suivi ceux proposés par Sara Checcoli et Julien Roques.

3. Poursuite en thèse

Les porteurs du présent projet sont susceptibles d'encadrer des thèses. L'éventail des sujets de thèse possibles est large, allant de la théorie des nombres à la géométrie, en passant par l'agèbre différentielle et les groupes algébriques.

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères
E-mail address: `Michel.Brion@univ-grenoble-alpes.fr`

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères
E-mail address: `Sara.Checcoli@ujf-grenoble.fr`

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères
E-mail address: `Greg.McShane@ujf-grenoble.fr`

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères
E-mail address: `Tanguy.Rivoal@ujf-grenoble.fr`

Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères
E-mail address: `Julien.Roques@ujf-grenoble.fr`