

Propriétés de la hauteur de Faltings

Gaël RÉMOND

juin 2021

Abstract. — We show an inequality between the Faltings heights of some isogenous abelian varieties over a number field. We then deduce that the Faltings height is superadditive in short exact sequences and also prove that in each isogeny class the smallest Faltings height is attained on an abelian variety whose endomorphism ring is a maximal order.

1 Résultats

Soit K un corps de nombres. Nous notons $h_F(\cdot)$ la hauteur de Faltings des variétés abéliennes sur K (sans faire d’extension de corps, ce n’est donc pas la hauteur stable).

Théorème 1.1 *Soient A une variété abélienne sur K et G, H deux sous-groupes finis de $A(\overline{K})$ stables sous l’action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$. Alors on a*

$$h_F(A/(G + H)) + h_F(A/(G \cap H)) \leq h_F(A/G) + h_F(A/H).$$

Cette inégalité est valable quelle que soit la normalisation de h_F choisie puisqu’un changement de normalisation consiste à ajouter un multiple réel de la dimension. Notons ensuite κ un réel tel que $h_F(A) + \kappa \dim A \geq 0$ pour toute variété abélienne A sur K . L’existence de ce réel est un théorème de Bost, il dépend de la normalisation et pour la normalisation initiale de Faltings un choix possible est $\kappa = \log(\pi\sqrt{2})$ (voir le corollaire 8.4 de [GR1]).

Corollaire 1.2 *Soient A une variété abélienne sur K et B une sous-variété abélienne de A (sur K). Alors $h_F(B) + h_F(A/B) \leq h_F(A)$.*

Ceci entraîne en particulier $h_F(B) + \kappa \dim B \leq h_F(A) + \kappa \dim A$. Il semble que ce soit là la première majoration connue de $h_F(B)$ qui ne fasse intervenir que $h_F(A)$ et $\dim A$. Les estimations antérieures comportaient un paramètre supplémentaire : le degré $h^0(B, \mathcal{L})$ de B relativement à une polarisation \mathcal{L} sur A (voir le paragraphe 2.3 de [GR1]) ou le degré $[K : \mathbb{Q}]$ du corps de nombres (voir le corollaire 1.5 de [GR2]).

Dans certains cas particuliers, l’inégalité du corollaire 1.2 peut s’obtenir par la méthode de la proposition 3.3 de [U]. Celle-ci montre que si $K = \mathbb{Q}$ et si A est semi-stable alors $h_F(A) = h_F(B) + h_F(A/B) + r \log 2$ où $0 \leq r \leq \dim(A/B)$ (il convient de corriger ainsi l’énoncé car la première suite exacte de la démonstration n’est pas correcte). La même démarche, basée sur le contrôle du défaut d’exactitude de la suite des modèles de Néron (voir le paragraphe 7.5 de [BLR] et l’appendice dû à Raynaud de [AU]), permet d’établir le corollaire 1.2 lorsque A est semi-stable sur un corps de nombres K tel que l’indice de ramification de toute place finie est strictement inférieur à la caractéristique résiduelle ($e(v|p) < p$ si $v|p$) mais ne donne pas de borne en présence de grande ramification.

Corollaire 1.3 *Dans toute classe d'isogénie de variétés abéliennes sur K , il existe une variété abélienne A de hauteur $h_F(A)$ minimale dans cette classe et dont l'anneau des endomorphismes $\text{End}A$ est un ordre maximal.*

Nos trois énoncés sont également valables avec la hauteur stable : c'est immédiat pour les deux premiers tandis que pour le troisième cela découlera du fait que la seule propriété de la hauteur utilisée dans sa démonstration est le théorème 1.1.

Le corollaire 1.3 est bien sûr trivial pour les variétés abéliennes telles que $\text{End}A = \mathbb{Z}$. En dehors de cela, il semble qu'il n'était connu jusqu'ici que dans le cas des variétés CM (pour la hauteur stable) d'après le travail de Mocz qui donne des renseignements bien plus précis sur la hauteur dans une classe d'isogénie de variétés abéliennes CM (voir [M]).

Nous basons notre démonstration du théorème 1.1 sur une formule pour la variation de la hauteur par isogénie due à Raynaud que nous rappelons dans la partie suivante. Dans le cas semi-stable, l'inégalité découle aussi d'un résultat de Fargues.

Je remercie Pascal Autissier et Éric Gaudron pour leurs remarques sur une première version de ce texte.

2 Formule de Raynaud

Lorsque v est une place ultramétrique du corps de nombres K et $r \geq 1$ un entier, nous notons K_v le complété de K en v et $K_{v,r}$ l'unique extension non ramifiée de K_v de degré r .

Proposition 2.1 *Si A et B sont deux variétés abéliennes sur K et $\varphi: A \rightarrow B$ une isogénie de degré d alors*

$$h_F(B) - h_F(A) = \frac{1}{2} \log d - \sum_{v|d} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))]}{r[K : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Contenue pour l'essentiel dans le texte de Raynaud [Ra] (qui l'utilise pour montrer que A et sa duale ont la même hauteur), cette formule n'y est toutefois pas écrite explicitement : nous reprenons donc les arguments en suivant d'assez près Raynaud. Sa proposition 1.4.1 permet d'écrire

$$h_F(B) - h_F(A) = \frac{1}{2} \log d - \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \log \text{Card}(\mathcal{O}_K/I)$$

pour un idéal I de \mathcal{O}_K associé à φ . Nous avons ensuite

$$\log \text{Card}(\mathcal{O}_K/I) = \sum_v v(I) \log q_v$$

où la somme porte sur les places finies de K et q_v est le cardinal du corps résiduel de K_v . Il est même possible de limiter cette somme aux places v divisant d par exemple parce que le théorème 2.1.1 donne l'existence d'un second idéal I' (associé à l'isogénie duale de φ) tel que $II' = d\mathcal{O}_K$. Fixons une telle place v ainsi que deux entiers $r, n \geq 1$ et notons \mathcal{O}_r l'anneau des entiers de $K_{v,r}$, $\pi \in \mathcal{O}_r$ une uniformisante et $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_r/\pi^n \mathcal{O}_r$. Désignons par \mathcal{A} et \mathcal{B} les modèles de Néron respectifs de A_{K_v} et B_{K_v} . En notant encore φ l'extension de notre isogénie à ces modèles et $\varphi_n: \mathcal{A}(\mathcal{O}'_n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{O}'_n)$ l'application induite, nous avons pour n assez grand un

diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes (voir page 209 de [Ra])

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & (\text{Ker}\varphi)(\mathcal{O}_r) & \longrightarrow & \text{Ker}\varphi_n & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \pi^n(\text{Lie}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{O}_r) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{A}(\mathcal{O}_r) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{O}'_n) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_n \\
0 & \longrightarrow & \pi^n(\text{Lie}(\mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}_r) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{B}(\mathcal{O}_r) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{O}'_n) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \Lambda_v \otimes \mathcal{O}_r & \longrightarrow & B(K_{v,r})/\varphi(A(K_{v,r})) & \longrightarrow & \text{Coker}\varphi_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où $\Lambda_v = \text{Lie}(\mathcal{B})/\text{Lie}(\mathcal{A})$ est un module fini de cardinal $q_v^{v(I)}$ par définition de I (haut de la page 203). Le lemme du serpent et l'exactitude de la dernière colonne entraînent alors

$$\log[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))] = rv(I) \log q_v + \log \text{Card}(\text{Ker}\varphi)(\mathcal{O}_r) + \log \frac{\text{Card}\mathcal{B}(\mathcal{O}'_n)}{\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_n)}.$$

Par lissité de \mathcal{A} , nous avons pour tout $n \geq 1$ une surjection $\mathcal{A}(\mathcal{O}'_{n+1}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}'_n)$ dont le noyau s'identifie (proposition III.5.1 de [SGA]) aux morphismes de l'image réciproque des différentielles de \mathcal{A} par la section unité $\text{Spec}\mathcal{O}'_n \rightarrow \mathcal{A}$ vers l'idéal de carré nul $\text{Ker}(\mathcal{O}'_{n+1} \rightarrow \mathcal{O}'_n) = \pi^n \mathcal{O}_r / \pi^{n+1} \mathcal{O}_r$ (vu comme faisceau sur $\text{Spec}\mathcal{O}'_n$). Puisque le faisceau des différentielles de \mathcal{A} est libre de rang $\dim A$, ce noyau est en bijection avec $\text{Hom}(\mathcal{O}'_n, \pi^n \mathcal{O}_r / \pi^{n+1} \mathcal{O}_r)^{\dim A} \simeq (\mathcal{O}'_1)^{\dim A}$. Ainsi $\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_{n+1}) = (\text{Card}\mathcal{O}'_1)^{\dim A} \text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_n)$ puis $\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_n) = (\text{Card}\mathcal{O}'_1)^{(n-1)\dim A} \text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_1)$. La même égalité étant valable pour \mathcal{B} , nous avons (avec $\dim A = \dim B$)

$$\frac{\text{Card}\mathcal{B}(\mathcal{O}'_n)}{\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_n)} = \frac{\text{Card}\mathcal{B}(\mathcal{O}'_1)}{\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_1)}.$$

Les bornes de Lang-Weil [LW] sur le corps \mathcal{O}'_1 de cardinal q'_v montrent qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ indépendantes de r telles que

$$c_1 \leq \frac{\text{Card}\mathcal{B}(\mathcal{O}'_1)}{\text{Card}\mathcal{A}(\mathcal{O}'_1)} \leq c_2.$$

Avec $1 \leq \text{Card}(\text{Ker}\varphi)(\mathcal{O}_r) \leq d$, nous en déduisons

$$\log[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))] = rv(I) \log q_v + O(1)$$

donc l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))] = v(I) \log q_v.$$

En combinant avec l'expression de $h_F(B) - h_F(A)$, nous trouvons bien l'égalité de l'énoncé. \square

Si A est une variété abélienne sur K et G un sous-groupe de $A(\overline{K})$, nous notons

$$G_{v,r} = \{P \in A(\overline{K}_v) \mid \sigma(P) - P \in G \text{ pour tout } \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v/K_{v,r})\}$$

où v est une place finie de K et $r \geq 1$. Nous avons alors la variante suivante de la formule de Raynaud.

Corollaire 2.2 *Si A est une variété abélienne sur K et G un sous-groupe fini de $A(\overline{K})$ stable sous l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ alors*

$$h_F(A/G) = h_F(A) + \frac{1}{2} \log \text{Card}G - \sum_{v|\text{Card}G} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log[G_{v,r} : A(K_{v,r})]}{r[K : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Nous posons $B = A/G$. Le quotient $\varphi: A \rightarrow B$ est une isogénie de degré $d = \text{Card}G$. Alors $G_{v,r} = \varphi^{-1}(B(K_{v,r}))$ et nous avons donc

$$[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))] \leq [G_{v,r} : A(K_{v,r})] \leq \text{Card}G \cdot [B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))].$$

Ainsi $(1/r) \log[B(K_{v,r}) : \varphi(A(K_{v,r}))]$ et $(1/r) \log[G_{v,r} : A(K_{v,r})]$ ont la même limite et la proposition donne le résultat. \square

Nous déduisons maintenant facilement le théorème 1.1 de cette expression de la hauteur du quotient d'une variété abélienne par un groupe fini. En effet, avec les notations de celui-ci, si nous remplaçons dans la quantité

$$\Delta = [K : \mathbb{Q}](h_F(A/G) + h_F(A/H) - h_F(A/(G \cap H)) - h_F(A/(G + H)))$$

chacune des quatre hauteurs par la valeur fournie par le corollaire 2.2 et notons $\text{Card}(G + H)\text{Card}(G \cap H) = \text{Card}(G)\text{Card}(H)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{v|\text{Card}(G+H)} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log \frac{[(G \cap H)_{v,r} : A(K_{v,r})][(G + H)_{v,r} : A(K_{v,r})]}{[G_{v,r} : A(K_{v,r})][H_{v,r} : A(K_{v,r})]} \\ &= \sum_{v|\text{Card}(G+H)} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log \frac{[(G + H)_{v,r} : G_{v,r}]}{[H_{v,r} : (G \cap H)_{v,r}]}. \end{aligned}$$

Par définition de $(\cdot)_{v,r}$ nous avons $(G \cap H)_{v,r} = G_{v,r} \cap H_{v,r}$ et $G_{v,r} + H_{v,r} \subset (G + H)_{v,r}$ donc

$$\frac{[(G + H)_{v,r} : G_{v,r}]}{[H_{v,r} : (G \cap H)_{v,r}]} = [(G + H)_{v,r} : G_{v,r} + H_{v,r}] \geq 1.$$

Nous aboutissons ainsi à $\Delta \geq 0$ qui est bien la conclusion du théorème 1.1.

3 Variante

Dans le cas semi-stable, il y a une autre façon d'établir le théorème 1.1 en termes de schémas en groupes finis et plats. Afin de décrire ceci, remarquons d'abord (pour alléger) qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque $G \cap H$ est trivial.

Nous supposons donc que la variété abélienne A est semi-stable ce qui signifie qu'il existe un schéma semi-abélien $\mathcal{A} \rightarrow S = \text{Spec} \mathcal{O}_K$ de fibre générique A . Il s'agit aussi du plus grand ouvert du modèle de Néron à fibres connexes. Nous notons toujours ε la section unité d'un schéma en groupes.

Lorsque G est un sous-groupe fini de $A(\overline{K})$ stable sous l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ autrement dit un sous-schéma en groupes fini réduit de $\mathcal{A} \rightarrow \text{Spec} K$, nous lui associons son adhérence schématique dans \mathcal{A} qui est un sous-schéma en groupes \mathcal{G} de $\mathcal{A} \rightarrow S$. C'est aussi le noyau de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ où $\mathcal{B} \rightarrow S$ est le modèle semi-abélien de A/G . Le schéma en groupes \mathcal{G} est quasi-fini et plat (voir l'exemple 1.1.2.b de [Ra] ou la page 357 de [Fal]).

La variation de la hauteur s'exprime en termes du faisceau des différentielles de \mathcal{G} (voir le bas de la page 202 et la proposition 1.4.1 de [Ra] ou le lemme 5 de [Fal])

$$h_F(A/G) = h_F(A) + \frac{1}{2} \log \text{Card}G - \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \log \text{Card} \varepsilon^* \Omega_{\mathcal{G}/S}^1.$$

Dans cette formule, $\varepsilon^*\Omega_{\mathcal{G}/S}^1$ est un faisceau de torsion sur S que nous identifions à un \mathcal{O}_K -module fini (isomorphe au quotient \mathcal{O}_K/I utilisé dans la démonstration de la proposition 2.1 ci-dessus).

Revenons au cadre du théorème 1.1 (avec $G \cap H = 0$) et notons \mathcal{H} et \mathcal{X} les adhérences schématiques respectives de H et $G+H$. Si nous substituons comme plus haut aux hauteurs des trois quotients leurs expressions en termes de différentielles, nous constatons que le théorème est équivalent à l'inégalité

$$\text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{G}/S}^1 \cdot \text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{H}/S}^1 \leq \text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{X}/S}^1$$

qui s'écrit encore

$$\text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{G} \times_S \mathcal{H}/S}^1 \leq \text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{X}/S}^1$$

en vertu de la formule pour les différentielles d'un produit fibré. Maintenant, puisque l'on a un morphisme (de somme) $\mathcal{G} \times_S \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}$ de S -schémas en groupes dont la fibre générique est un isomorphisme ($G \times H \rightarrow G+H$), cette majoration découle du fait suivant.

Lemme 3.1 *Soient \mathcal{Z} et \mathcal{X} deux S -schémas en groupes quasi-finis et plats et un morphisme $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ dont la fibre générique est une immersion fermée. Alors*

$$\text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{Z}/S}^1 \leq \text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{X}/S}^1.$$

Démonstration. C'est en substance le résultat de Fargues dans [Far] (voir le bas de la page 2 puis le corollaire 3). Toutefois, pour être exactement dans le cadre de cet article, il faut faire quelques réductions faciles. Tout d'abord, nous séparons les contributions au-dessus de chaque place v pour travailler sur $S_v = \text{Spec } \mathcal{O}_{K_v}$ puis nous remplaçons nos schémas en groupes quasi-finis et plats par leurs composantes neutres. Nous obtenons un S_v -morphisme $f_v: \mathcal{Z}_v^0 \rightarrow \mathcal{X}_v^0$ dont la fibre générique est encore une immersion fermée. De plus, les S_v -schémas en groupes \mathcal{Z}_v^0 et \mathcal{X}_v^0 sont finis et plats (car la composante neutre est contenue dans la partie finie, voir le paragraphe 1.2 de [Ra]) et d'ordre une puissance de p , la caractéristique résiduelle de v (car un S_v -schéma en groupes fini et plat d'ordre premier à p est étale). Il suffit de montrer l'inégalité pour les cardinaux dans ce morphisme f_v et nous pouvons même le remplacer par le morphisme restreint $g_v: \mathcal{Z}_v^0 \rightarrow \text{Im } f_v$ puisque, dans l'immersion fermée $\text{Im } f_v \rightarrow \mathcal{X}_v^0$, l'inégalité est évidente ($\varepsilon^*\Omega_{\text{Im } f_v/S_v}^1$ est un quotient de $\varepsilon^*\Omega_{\mathcal{X}_v^0/S_v}^1$). Ceci fait, nous observons que si \mathcal{Y} est un S_v -schéma en groupes fini et plat d'ordre une puissance de p alors le degré de \mathcal{Y} employé par Fargues est relié aux différentielles par

$$\text{Card } \varepsilon^*\Omega_{\mathcal{Y}/S_v}^1 = p^{[K_v:\mathbb{Q}_p] \deg \mathcal{Y}}.$$

De cette façon, l'inégalité voulue découle bien de [Far] puisque g_v est un isomorphisme en fibre générique. \square

4 Conséquences

Pour démontrer le corollaire 1.2, nous choisissons une sous-variété abélienne B' de A (sur K) quasi-supplémentaire de B c'est-à-dire telle que $B \cap B'$ est fini et $A = B + B'$. Notons G le noyau de l'isogénie de somme $B \times B' \rightarrow A$ qui s'écrit donc $G = \{(x, -x) \mid x \in B \cap B'\}$ puis $H = (B \cap B') \times \{0\} \subset B \times B'$. Il est immédiat que $G \cap H = \{0\}$ et $G + H = (B \cap B') \times (B \cap B')$ donc le théorème 1.1 s'écrit

$$h_F(B \times B') + h_F(B/(B \cap B') \times B'/(B \cap B')) \leq h_F(A) + h_F(B/(B \cap B') \times B').$$

En utilisant que la hauteur d'un produit est la somme des hauteurs des facteurs et en simplifiant, nous avons $h_F(B) + h_F(B'/(B \cap B')) \leq h_F(A)$ qui est l'inégalité cherchée car $B'/(B \cap B') \simeq A/B$.

Pour le corollaire 1.3, nous employons le fait suivant.

Lemme 4.1 *Soit A une variété abélienne sur K . Il existe un entier $d \geq 1$ et des isogénies $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \text{End}A$ telles que l'anneau des endomorphismes de la variété abélienne*

$$A / \bigcap_{i=1}^d \text{Ker}\varphi_i$$

est un ordre maximal.

Démonstration. Il s'agit d'un léger raffinement de la proposition 2.3 de [Ré]. En effet, si nous reprenons les notations utilisées dans la démonstration de celle-ci, nous avons $A' \simeq A/\text{Ker}\chi_1$ et $\text{Ker}\chi_1 = \bigcap_{i=1}^d \text{Ker}Ne_i$. Ici $Ne_i \in \text{End}A$ n'est pas nécessairement une isogénie sauf pour $i = 1$ puisque $e_1 = 1$. Nous posons alors $\varphi_1 = [N]$ et $\varphi_i = Ne_i + n\varphi_1$ pour $2 \leq i \leq d$ où n est un entier. En choisissant n assez grand, tous les φ_i sont des isogénies et nous avons $\text{Ker}\chi_1 = \bigcap_{i=1}^d \text{Ker}\varphi_i$. Ceci donne le résultat puisque la construction assure que $\text{End}A'$ est un ordre maximal. \square

Le théorème 1.1 montre que si A/G et A/H sont toutes deux de hauteur minimale dans leur classe d'isogénie alors il en va de même de $A/(G \cap H)$ et $A/(G + H)$. Si A elle-même est de hauteur minimale, ceci s'applique aux groupes $\text{Ker}\varphi$ où $\varphi \in \text{End}A$ est une isogénie donc la variété quotient du lemme est elle aussi de hauteur minimale. Ceci donne bien le corollaire 1.3 parce que, dans toute classe d'isogénie de variétés abéliennes sur K , il existe une variété abélienne de hauteur minimale (par Faltings, la classe d'isogénie est finie).

Références

- [AU] A. Abbes et E. Ullmo. À propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires. *Compositio Math.* 103. 1996. p. 269–286.
- [BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud. *Néron models*. Springer-Verlag, New York. 1990.
- [Fal] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.* 73. 1983. p. 349–366. — Erratum. *ibid.* 75. 1984. p. 381.
- [Far] L. Fargues. La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. *J. reine angew. Math.* 645. 2010. p. 1–39.
- [GR1] É. Gaudron et G. Rémond. Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. *Comment. Math. Helv.* 89. 2014. p. 343–403.
- [GR2] É. Gaudron et G. Rémond. Polarisations et isogénies. *Duke Math. J.* 163. 2014. p. 2057–2108.
- [LW] S. Lang et A. Weil. Number of points of varieties in finite fields. *Amer. J. Math.* 76. 1954. p. 819–827.
- [M] L. Mocz. A New Northcott Property for Faltings Height. 2017. 62 pages. [arXiv:1709.06098](https://arxiv.org/abs/1709.06098).
- [Ra] M. Raynaud. Hauteurs et isogénies. *Astérisque* 127. 1985. p. 199–234.
- [Ré] G. Rémond. Variétés abéliennes et ordres maximaux. *Rev. Mat. Iberoam.* 33. 2017. p. 1173–1195.

- [SGA] *Revêtements étales et groupe fondamental*. SGA 1. Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. Lecture Notes in Mathematics. 224. Springer-Verlag, Berlin-New York. 1971.
- [U] E. Ullmo. Hauteur de Faltings de quotients de $J_0(N)$, discriminants d'algèbres de Hecke et congruences entre formes modulaires. *Amer. J. Math.* 122. 2000. p. 83–115.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
CS 40700
38058 Grenoble Cedex 9
France
`Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr`