Xcas et les mathématiques de troisième

Renée De Graeve

7 janvier 2015

Remerciements

Je remercie :
— Bernard Parisse pour ses précieux conseils et ses remarques sur ce texte,

Ce document est disponible à l'adresse Internet suivante :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/castrois.pdf`

Préface

Bernard Parisse est Maître de Conférences à l'Université de Grenoble I.
Il est le développeur du logiciel de calcul formel `giac` et de son interface `Xcas`.
La version à jour se récupère sur ;
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`

Table des matières

Chapitre 1

Calculs : nombres relatifs, fractions, puissances

1.1 Calculs exacts avec `Xcas`

Avec `Xcas`, on fait du calcul exact.
Avec `Xcas`, les simplifications ne se font pas automatiquement, seules les parenthèses inutiles sont enlevées et les fractions sont simplifiées. Pour avoir la forme simplifiée d'une expression, il faut utiliser la commande `normal`. On remarquera que la réponse se fait dans un éditeur d'équations, ce qui fait que l'on peut mettre en surbrillance chaque sous-arbre de l'expression et agir sur lui à l'aide des commandes situées dans les différents menus.
Pour faire les calculs :

— On effectue les calculs mis entre les parenthèses,
— On effectue les puissances,
— On effectue les multiplications et les divitions dans l'ordre de gauche à droite.
— On effectue les additions et les soustractions dans l'ordre de gauche à droite.

1.2 Calculs avec des nombres relatifs et avec des puissances

Calculer et écrire chacune des expressions de 2 façons différentes (soit en calculant les calculs mis entre les parenthèses, soit en effectuant les puissances) :

1. $-2+3*4^2/5*6-1$
2. $-2+(3*4)^2/5*6-1$
3. $-2+3*4^2/(5*6)-1$
4. $-2+(3*4)^2/(5*6)-1$
5. $-2+3*4^2/(5*6-1)$
6. $(-2+3*4^2)/5*6-1$
7. $(-2+3*4^2)/(5*6-1)$

Avec `Xcas`,

1. On tape :
   `-2+3*4^2/5*6-1`
   ou
   `-2+(3*16)/5*6-1`
   On obtient : `273/5`
2. On tape :
   `-2+(3*4)^2/5*6-1`
   ou
   `-2+12^2/5*6-1`
   On obtient : `849/5`
3. On tape :
   `-2+3*4^2/(5*6)-1`
   ou
   `-2+3*16/30-1`
   On obtient : `-7/5`
4. On tape :
   `-2+(3*4)^2/(5*6)-1`
   ou
   `-2+12^2/30-1`
   On obtient : `9/5`
5. On tape :
   `-2+3*4^2/(5*6-1)`
   ou
   `-2+3*16/29`
   On obtient : `(-10)/29`
6. On tape :
   `(-2+3*4^2)/5*6-1`
   ou
   `(-2+3*16)/5*6-1`
   On obtient : `271/5`
7. On tape :
   `(-2+3*4^2)/(5*6-1)`
   ou
   `(-2+3*16)/29`
   On obtient : `46/29`

1.3 Calculs avec des fractions et avec des racines

1. Simplifier ou calculer :
   — $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$
   — $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$
   — $\sqrt{2+\sqrt{2}}*\sqrt{2-\sqrt{2}}$

— $\sqrt{2}*\sqrt{2+\sqrt{2}}*\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}*\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Solution avec `Xcas`

`sqrt` est la fonction racine carrèe.
`normal` et `simplify` sont des fonctions qui effectuent des simplifications.
`developper` est une fonction qui développe une expression.

- On tape :
  `normal(sqrt((2+sqrt(2))/(2-sqrt(2)))+`
  `sqrt((2-sqrt(2))/(2+sqrt(2))))`
  On obtient : `2*sqrt(2)`

- On tape :
  `normal(sqrt((2+sqrt(3))/(2-sqrt(3)))+`
  `sqrt((2-sqrt(3))/(2+sqrt(3))))`
  On obtient : `4`

- On tape :
  `normal(sqrt(2+sqrt(2))*sqrt(2-sqrt(2)))`
  On obtient : `sqrt(2)`

- On tape :
  `normal(sqrt(2)*sqrt(2+sqrt(2))*(sqrt(2+sqrt(2+sqrt(2)))*`
  `sqrt(2-sqrt(2+sqrt(2)))))`
  On obtient : `2`
  Pour avoir le détail des calculs, on tape :
  `A:=sqrt(2)*sqrt(2+sqrt(2))*(sqrt(2+sqrt(2+sqrt(2)))*`
  `sqrt(2-sqrt(2+sqrt(2))))`
  `developper(A^2)`
  On obtient :
  `2*(sqrt(2)+2)*(sqrt(sqrt(2)+2)+2)*(-(sqrt(sqrt(2)+2))+2)`
  Puis on met en surbrillance :
  `(sqrt(sqrt(2)+2)+2)*(-(sqrt(sqrt(2)+2))+2)`
  et on appuie sur `simplify` du clavier `kbd` de `Xcas`.
  On obtient :
  `2*(sqrt(2)+2)*(-(sqrt(2))+2)`
  Puis on met en surbrillance :
  `(sqrt(2)+2)*(-(sqrt(2))+2)`
  et on appuie sur `simplify` du clavier `kbd` de `Xcas`.
  On obtient la valeur de `A^2` :
  `2*2`
  `A` est positif donc `A` est égal à `2`

2. Simplifier ou calculer :
   - $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}$
   - $\dfrac{-2}{3}*(\dfrac{-3}{-5}+\dfrac{-5}{6})-\dfrac{3}{5}*(\dfrac{-5}{4}-\dfrac{7}{12})$

- $2\sqrt{45} + 3\sqrt{12} - \sqrt{20} - 6\sqrt{3}$
- $2\sqrt{605} + 3\sqrt{3125} - 4\sqrt{845}$
- $2\sqrt{25} + 3\sqrt{12} - \sqrt{48}$

Solution avec `Xcas`

- On tape :
  `(1/3+3/2)/(4/5-1/2);`
  On obtient : `55/9`
- On tape :
  `-2/3*(-3/-5+-5/6)-3/5*(-5/4-7/12);`
  On obtient : `113/90`
- On tape :
  `normal(2*sqrt(45)+3*sqrt(12)-sqrt(20)-6*sqrt(3));`
  On obtient : `4*sqrt(5)`
- On tape :
  `normal(2*sqrt(605)+3*sqrt(3125)-4*sqrt(845));`
  On obtient : `45*sqrt(5)`

3. Écrire avec un dénominateur rationnel :
   - $\dfrac{-2}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{3}{5+3\sqrt{5}}$
   - $\dfrac{-7}{1+\sqrt{2}} - (\dfrac{3}{2-3\sqrt{2}}) * (\dfrac{-7}{4-\sqrt{2}})$

   Solution avec `Xcas`

   - On tape :
     `normal(-2/(3-sqrt(5))+3/(5+ 3*sqrt(5)))`
     On obtient : `(-(sqrt(5))-45)/20`
   - On tape :
     `normal(-7/(1+sqrt(2))-(3/(2-3*sqrt(2)))*(-7/(4-sqrt(2))))`
     On obtient : `(-17*sqrt(2)+11)/2`

1.4 Calculs avec des puissances

Mettre sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers

1. - $15 * 45^2$
   - $21^2 * 28^2 * (-45)^2$
   - $\dfrac{6^2 * 20 * 21}{64 * 3^3}$
   - $\dfrac{6^2 * 20 * 21 * 28}{64 * 3^3}$
2. Le nombre $2^2 * 6 * 3^{20} * 5^2$ est-il un cube parfait ?
3. Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier $2 * 3^2 * 5$ pour que ce produit soit un cube parfait et un carré parfait.

Solution avec `Xcas`

`factoriser_entier` est une fonction qui factorise les nombres entiers en produit de facteurs premiers

1. - On tape :
     `(6^2*20*21*28)/(2^3*40*3^3)`

On obtient : `49`
On tape :
`factoriser_entier(49)`
On obtient : `7^2`
Pour avoir le détail des calculs il faut appliquer la fonction `factoriser_entier` au numérateur et au dénominateur.
On tape :
`factoriser_entier(6^2*20*21*28)/factoriser_entier(2^3*40*3^3)`
On obtient : `2^6*3^3*5*7^2/(2^6*3^3*5)`
Il reste ensuite à simplifier à la main !

- On tape :
`(6^2*20*21*28)/(64*3^3)`
On obtient : `245`
On tape :
`factoriser_entier(245)`
On obtient : `5*7^2` Pour avoir le détail des calculs il faut appliquer la fonction `factoriser_entier` au numérateur et au dénominateur.
On tape :
`factoriser_entier(6^2*20*21*28)/factoriser_entier(64*3^3)`
On obtient : `2^6*3^3*5*7^2/(2^6*3^3)`
Il reste ensuite à simplifier à la main !

2. On tape :
`factoriser_entier(2^2*6*3^20*5^2)`
On obtient : `2^3*3^21*5^2`
Le nombre $2^2 * 6 * 3^{20} * 5^2$ n'est pas un cube parfait car la puissabce de 5 n'est pas divisible par 3.

3. Pour que $2 * 3^2 * 5^3$ soit un cube parfait et un carré parfait, il faut que les puissances de sa décomposition en facteurs premiers soient des multiples de 6. On tape :
`factoriser_entier((2*3*5)^6/(2*3^2*5^3))`
On obtient : `2^5*3^4*5^3`

Chapitre 2

Le calcul littéral

2.1 Le calcul littéral et exact avec Xcas

Xcas peut faire des calculs avec des lettres car les variables de Xcas sont soit des variables symboliques, soit des variables contenant des expressions.
Par exemple si on tape :
`a:=3` cela veut dire que l'on stocke 3 dans le variable `a`. Ainsi la lettre `a` sera remplacée dans les calculs par `3`.
Maintenant si on tape :
`purge(a)`, cela enlève la valeur stockée dans la variable `a`. Ainsi dans les calculs, la lettre `a` restera `a`.
Xcas fait du calcul exact : les nombres entiers comme $100!$ seront calculés avec tous leurs chiffres et le nombres réels comme $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$ ne seront pas remplacés dans les calculs par leurs valeurs approchées.
Attention
Xcas ne sous entend pas le signe `*` (sauf si il s'agit du produit d'un nombre et du nom d'une variable), par exemple :
en mathématiques le produit $x+1$ par $3x+2$ s'écrit $(x+1)(3x+2)$ mais
avec Xcas on écrit `(x+1)*(3*x+2)` ou `(x+1)*(3x+2)`,
en mathématiques $2mx$ est le produit de 2, de m et de x, mais
avec Xcas ce produit s'écrit `2*m*x` ou `2m*x` ou `2x*m`.

2.2 Exercices

- Simplifier : $(\frac{25}{49})^2 * (\frac{14}{15})^3 * (\frac{21}{5})$
- Simplifier : $\frac{(a^2b^3c^4)^2}{(a^2b^2c^2)^3}$
- Factoriser $50!$
- Les nombres $123456789, 12345678901, 12345678923$ sont-ils premiers ? Dans le cas où ils ne sont pas premiers donner leur décomposition en facteurs premiers.

Solution avec Xcas
`isprime` est une fonction qui teste si un nombre est premier en renvoyant `vrai` ou `faux`.

- On tape :
  `(25/49)^2*(14/15)^3*(21/5)`
  On obtient : `8/9`
- On tape :
  `normal((a^2*b^3*c^4)^2/(a^2*b^2*c^2)^3)`
  On obtient : `c^2/a^2`
- On tape :
  `factoriser_entier(50!)`
  On obtient :
  `2^47*3^22*5^12*7^8*11^4*13^3*17^2*`
  `19^2*23^2*29*31*37*41*43*47`
- On tape :
  `isprime(123456789)`
  On obtient : `faux`
  On tape :
  `factoriser_entier(123456789)`
  On obtient : `3^2*3607*3803`
  On tape :
  `isprime(12345678901)`
  On obtient : `faux`
  On tape :
  `factoriser_entier(12345678901)`
  On obtient : `857*14405693`
  On tape :
  `isprime(12345678923)`
  On obtient : `vrai`

2.3 Les commandes sur les expressions et les équations

Expressions et équations	
`developper`	renvoie l'expression developpée
`factoriser`	renvoie l'expression factorisée
`droit`	renvoie le membre de droite d'une équation
`gauche`	renvoie le membre de gauche d'une équation
`resoudre`	renvoie la liste des solutions de l'équation
`normal`	renvoie l'expression simplifiée
`substituer`	remplace, dans une expression, une variable par sa valeur

2.4 Une activité

Soit l'expression $E = (2x-4)^2 + x^2 - 4$.
— Développer et réduire E en indiquant les étapes intermédiaires
— Factoriser E en indiquant les étapes intermédiaires
— Calculer E pour $x = 0, \frac{1}{2}, 2$
— Résoudre l'équation en x : $E = 0$
— Résoudre l'équation en x : $E = x - 2$

Solution avec `Xcas` On tape

```
E:=(2x-4)^2+x^2-4;
normal(E);
developper((2x-4)^2)+x^2-4;
normal(4*x^2-16*x+16+x^2-4);
factoriser(E);
factoriser((2x-4)^2);
factoriser(x^2-4);
factoriser(4*(x-2)^2+(x+2)*(x-2));
substituer(E,x,0);
substituer(E,x,1/2);
substituer(E,x,2)
resoudre(E=0,x);
factoriser(E);
resoudre(E=x-2,x);
factoriser(gauche(E=x-2)-droit(E=x-2))
```

2.5 Développer une expression

Exercices
Développer et réduire les expressions :

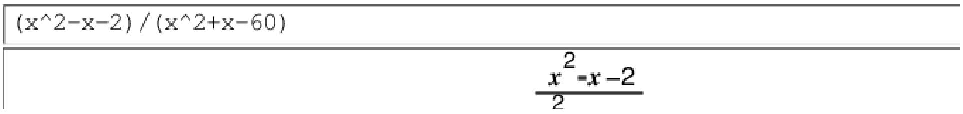
1. $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
2. $(a\hat{}2+a+1)(a\hat{}2-a+1)-(a\hat{}2-1)(a\hat{}4+a\hat{}2+1)$
3. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)$
4. $a\hat{}2(b-c)+b\hat{}2(c-a)+c\hat{}2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)$

Solutions avec `Xcas`

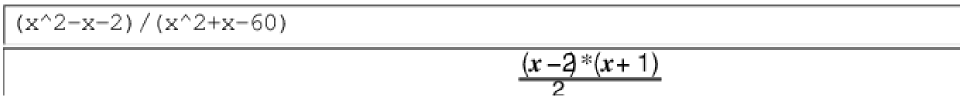
1. On tape :
   `developper((a+b+c)*(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `-b^3*c+a^3*c-a^3*b+b*c^3-a*c^3+a*b^3`
2. On tape :
   `developper((a^2+a+1)*(a^2-a+1)-(a^2-1)*(a^4+a^2+1))`
   On obtient :
   `-a^6+a^4+a^2+2`
3. On tape :
   `normal(b*c*(b-c)+c*a*(c-a)+a*b*(a-b)+(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `0`
4. On tape :
   `normal(a^2*(b-c)+b^2*(c-a)+c^2*(a-b)+(a-b)*(b-c)*(c-a))`
   On obtient :
   `0`

2.6 Factoriser une expression

Par exemple on tape : `(x^2-x-2)/(x^2+x-6)` et on obtient :



Puis on met en surbrillance $x^2 - x - 2$ et on clique sur `factoriser` du menu `Reecriture` ou sur `factoriser` du clavier `kbd` et on obtient :



Exercices

Factoriser :

1. $(a+b)^3 + (a+b)^2$
2. $a^2 + 4ab + 4b^2 - 1$
3. $4a^2 - 4a - 4b^2 + 1$
4. $(4a-1)^2 * +(8a+2)(a+5)$
5. $(3a-5)(a+6) + (5-3a)(a-3) + 9a - 15)$
6. $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$

Solutions avec `Xcas`

1. On tape :
   `factoriser((a+b)^3+(a+b)^2)`
   On obtient :
   `(a+b)^2*(a+b+1)`
2. On tape :
   `factoriser(a^2+4a*b+4b^2-1)`
   On obtient :
   `(a+2*b-1)*(a+2*b+1)`
3. On tape :
   `factoriser(4a^2-4a-4b^2+1)`
   On obtient :
   `(2*a-2*b-1)*(2*a+2*b-1)`
4. On tape :
   `factoriser((4a-1)^2*+(8a+2)*(a+5))`
   On obtient :
   `2*(a+5)*(4*a-1)^2*(4*a+1)`
5. On tape :
   `factoriser((3a-5)*(a+6)+(5-3a)*(a-3)+9a-15))`
   On obtient :
   `12*(3*a-5)`
6. On tape :
   `factoriser(b*c*(b-c)+c*a*(c-a)+a*b*(a-b))`
   On obtient :
   `(c-a)*(b-a)*(b-c)`

Chapitre 3

Arithmétique

3.1 La division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
On écrit $a = b * q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ qui vérifie $0 \leq r < b$.
On dit que q est le quotient de la division euclidienne de a par b et que r est le reste de la division euclidienne de a par b.
On a : $0 \leq a - b * q < b$
On peut trouver q et r avec des soustractions successives.
On tape :

```
quoreste(a,b):={
local q;
q:=0;
tantque a>=b faire
a:=a-b;
q:=q+1;
ftantque
retourne [q,a];
}:;
```

Dans `Xcas` cette fonction existe déjà et s'appelle `iquorem`.
On tape :
`iquorem(45,7)`
On obtient :
`[6,3]`
En effet $45 = 6 * 7 + 3$
Il existe aussi `iquo(a,b)` qui renvoie le quotient `q` de la division euclidienne de a par b et `irem(a,b)` qui renvoie le reste `r` de la division euclidienne de a par b.
On tape :
`iquo(45,7)`
On obtient : `6`
On tape :
`irem(45,7)`
On obtient : `3`
Si r=`irem`(a,b) est nul, on dit que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

3.2 Le PGCD

Le $PGCD(a, b)$ est le plus grand commun diviseur de a et de b.
Pour calculer le $PGCD(a, b)$ on utilise l'algorithme d'Euclide qui utilise le fait que : si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors :
$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.
En effet si $a = bq + r$ tous les diviseurs communs à a et b sont aussi des diviseurs de r et tous les diviseurs communs à b et r sont aussi des diviseurs de a.
Donc on cherche le $PGCD(b, r)$ et $r < b$ et on recommence. À chaque étape les restes sont positifs ou nuls et strictement décroissants donc il va arriver un moment ou un reste sera nul et donc le $PGCD(a, b)$ sera égal au dernier reste non nul.
On tape en utilisant :
tantque <condition> faire <instructions> ftantque qui teste la condition si <condition> est vraie les <instructions> sont exécutés puis on teste <condition> ...et on s'arrête quand <condition> devient fausse.
`retourne` renvoie la valeur de la fonction (ici renvoie le PGCD(a,b)).

```
PGCD(a,b):={
local r;
tantque b>0 faire
r:=irem(a,b);
a:=b
b:=r;
ftantque
retourne a;
}:;
```

On tape :
`PGCD(45,30)`
On obtient :
`15`
On tape :
`PGCD(30,45)`
On obtient :
`15`
On tape :
`PGCD(45,30)`
On obtient :
`15`
On tape :
`PGCD(1234567890,12345678)`
On obtient :
`18`
Remarque
Lorsque $a < b$ on a $a = 0 * b + a$ donc le premier reste trouvé est a. On cherche ensuite le reste de b par a...dans l'exemple `PGCD(30,45)` l'algorithme dit :
le reste de 30 par 45 est 30
le reste de 45 par 30 est 15
le reste de 30 par 15 est 0

le premier reste non nul est donc 15 donc :
`PGCD(45,30)=15`
Dans `Xcas` cette fonction existe déja et s'appelle `gcd`.
On tape `gcd(45,30)` et on obtient `15`
Exercice
Un terrain rectangulaire a comme dimension 60 m de long et 45 m de large.
On veut planter des arbres régulièrement espacés tout autour du terrain. Quelle doit être la distance entre 2 arbres consecutifs si on veut qu'il y ait un arbre sur chaque sommet du rectangle et si on veut que cette distance soit un nombre entier de mètres ?
Solution avec `Xcas`
`idivis` renvoie la liste de tous les diviseurs d'un nombre entier.
`gcd` renvoie le PGCD de 2 nombres entiers
La distance cherchée est un diviseur commun à 60 et 45.
On tape :
`gcd(60,45)`
On obtient : `15`
On tape pour avoir tous les diviseurs de 15 :
`idivis(15)`
On obtient : `[1,3,5,15]`
Donc la distance entre 2 arbres pourra être 1m, 3m, 5m ou 15m.

3.3 Rendre une fraction irréductible

Pour rendre une fraction N/D ($N \in \mathbb{Z}$ et $D \in \mathbb{Z}$) irréductible il faut diviser son numérateur N et son dénominateur D par le PGCD(N, D).
`Xcas` simplifie automatiquement une fraction en une fraction irréductible.
On tape :
`12345678/3429355`
On obtient : `18/5`
On tape :
`gcd(12345678,3429355)`
On obtient : `685871`
On tape :
`12345678/685871,3429355/685871`
On obtient : `18,5`

Chapitre 4

Équations et inéquations

4.1 Résoudre $x^2 = a$

Si $a < 0$ il n'y a pas de solution
Si $a = 0$ il y a 1 solution qui est $x = 0$
Si $a > 0$ il y a 2 solutions qui sont $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$
Avec `Xcas`
On tape :
`resoudre(x^2=-2)`
On obtient : `[]`
On tape :
`resoudre(x^2=2)`
On obtient : `[-sqrt(2),sqrt(2)]`
On tape :
`resoudre(x^2=4+2*sqrt(3))`
On obtient : `[-(sqrt(3))-1,sqrt(3)+1]`

4.2 Résoudre une équation produit

On sait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteur est nul. Si un équation est mise sous la forme d'un produit, elle est donc facilement résoluble.
Exercices

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
   - $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2-4) = 0$
2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations :
   - $2mx - 1 = x + 7$
   - $(m-1)x + 2x - 3 = m - 1$

Les solutions avec `Xcas`

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + 2x - 4)^2 = 10x(4x-2)$
     On tape :
     `resoudre((6x-1)^2+(2x-4)^2=10x*(4x-2))`

On obtient : `[17/8]`
Pour avoir le détail des calculs, on tape :
`developper((6x-1)^2+(2x-4)^2=10x*(4x-2))`
On obtient : `40*x^2-28*x+17=(40*x^2-20*x)`
Donc $8x = 17$ i.e. $x = 17/8$

- $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2 - 4) = 0$
On tape :
`resoudre((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4)=0)`
On obtient : `[-2/3,1/18]`
Pour avoir le détail des calculs, on tape :
`factoriser((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4))`
On obtient : `(3*x+2)*(18*x-1)`
Donc $(3x+2)(18x-1) = 0$ si et seulement si $3x+2 = 0$ ou si $18x - 1 = 0$ i.e. $x = -2/3$ ou $x = 1/18$

2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les équations :
   - $2mx - 1 = x + 7$
   On tape :
   `resoudre(2*m*x-1=x+7)`
   On obtient : `[8/(2*m-1)]`
   Attention
   `Xcas` ne renvoie que le cas général qui n'est valable ici que si $m \neq 1/2$.
   - $(m-1)x + 2x - 3 = m - 1$
   On tape :
   `resoudre((m-1)*x+2x-3=m-1)`
   On obtient : `[(m+2)/(m+1)]`
   Attention
   `Xcas` ne renvoie que le cas général qui n'est valable ici que si $m \neq -1$

4.3 Résoudre une inéquation

Dans une inéquation on peut faire passer un terme d'un membre à l'autre à condition de changer son signe.
Dans une inéquation on peut diviser ou multiplier les 2 membres d'une inéquation par un nombre strictement positif sans changer le sens de l'inéquation et par un nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inéquation.
Exercices

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
   - $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2 - 4) = 0$
2. Résoudre les inéquations :
   - $3(x-1) + 7(3x-2) < 6(x+1)$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$
3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les inéquations :
   - $m(x-3) > x + 2$
   - $m(x-1) + (x-3)(x-7) > (x+1)^2$

Les solutions avec `Xcas`

1. Résoudre les inéquations :
   - $3(x-1)+7(3x-2) < 6(x+1)$
     On tape :
     `resoudre(3*(x-1)+7*(3x-2)<6*(x+1))`
     On obtient : `[x<(23/18)]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=(3*(x-1)+7*(3x-2)<6*(x+1))`
     On obtient : `(6*(x+1))>(3*(x-1)+7*(3*x-2))`
     Attention
     `Xcas` écrit toujours une inéquation avec le signe > ou >=.
     On tape :
     `developper(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `-18*x+23`
     $-18*x+23 > 0$ est équivalent à $23 > 18x$ donc $x < \frac{23}{18}$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$
     On tape :
     `resoudre((3*x-4)/(x-1)>=3)`
     On obtient : `[x<1]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=(3*x-4)/(x-1)>=3`
     `factoriser(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `-1/(x-1)`
     $-1/(x-1) >= 0$ est équivalent à $x-1 < 0$ donc à $x < 1$
2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m les inéquations :
   - $m(x-3) > x+2$
     On tape :
     `purge(m);resoudre(m*(x-3)>x+2,x)` On obtient :
     `un message donnant la solution de l'équation correspondante ici` $(3m+2)/(m-1)$
     On tape :
     `supposons(m>1);`
     `resoudre(m*(x-3)>x+2,x)`
     On obtient : `[x>((3*m+2)/(m-1))]`
     On tape :
     `supposons(m<1);`
     `resoudre(m*(x-3)>x+2,x)`
     On obtient : `[x<((3*m+2)/(m-1))]`
     Pour avoir le détail des calculs, on tape :
     `E:=m*(x-3)>x+2`
     `developper(gauche(E)-droit(E))`
     On obtient : `(m-1)*x-3*m-2`
     Donc $(m-1)*x > 3*m+2$ et on termine à la main :
     si $m > 1$ alors la solution est $x > \dfrac{3*m+2}{m-1}$
     si $m < 1$ alors la solution est $x < \dfrac{3*m+2}{m-1}$
     si $m = 1$ alors $3*m+2 = 5$ donc il n'y a pas de solution.
   - $m(x-1)+(x-3)(x-7) > (x+1)^2$

On tape :
`purge(m);resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)`
renvoie un message donnant la solution de l'équation correspondante ici $(m-20)/(m-12)$
On tape alors :
`supposons(m>12)`
`resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)` renvoie un message donnant On obtient : `[x>((m-20)/(m-12))]`
On tape alors :
`supposons(m<12)`
`resoudre(m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2,x)` renvoie un message donnant On obtient : `[x<((m-20)/(m-12))]`
Pour avoir le détail des calculs, on tape :
`E:=m*(x-1)+(x-3)*(x-7)>(x+1)^2`
`developper(gauche(E)-droit(E))`
On obtient : `(m-12)*x-m+20`
Donc $(m-12)*x > m-20$ et on termine à la main :
si $m > 12$ alors la solution est $x > \dfrac{m-20}{m-12}$
si $m < 12$ alors la solution est $x < \dfrac{m-20}{m-12}$
si $m = 12$ alors $m-20 = -8$ donc l'inéquation est verifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

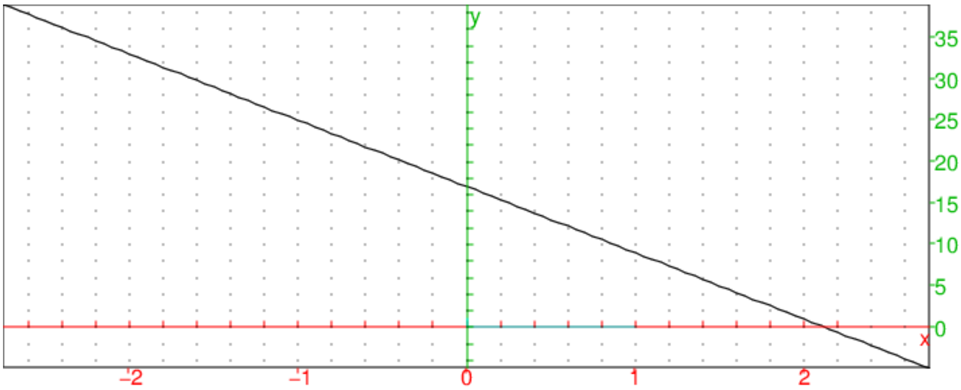
4.4 Résoudre une équation ou une inéquation graphiquement

Il peut être interressant de visualiser la ou les solutions d'une équation ou d'une inéquation en la repésentant graphiquement.
Reprenons les exemples précédents :

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
   - $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2-4) = 0$
2. Résoudre les inéquations :
   - $3(x-1) + 7(3x-2) < 6(x+1)$
   - $\dfrac{3x-4}{x-1} >= 3$

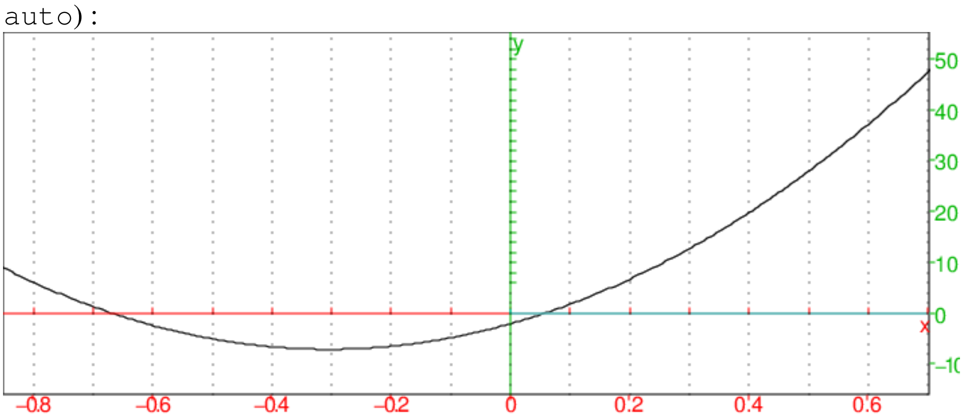
Les solutions graphiques avec `Xcas`

1. Résoudre les équations :
   - $(6x-1)^2 + (2x-4)^2 = 10x(4x-2)$
     On tape :
     `G1:=plotfunc((6x-1)^2+(2x-4)^2-10x*(4x-2))`
     On obtient après avoir fait un grossissement (cliquez sur `in` et sur `auto`) :



On tape :
`abscisse(inter(G1,droite(y=0)))`
On obtient : `[17/8]`

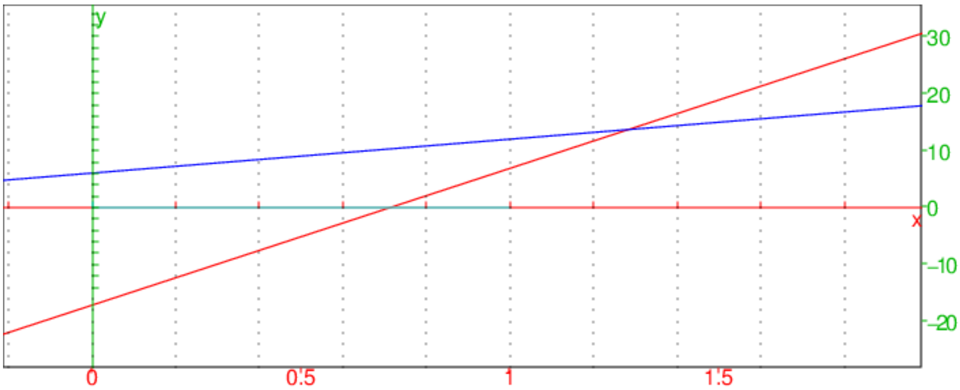
- $(3x+2)^2 + 7(3x+2) + 5(9x^2 - 4) = 0$
  On tape :
  `G2:=plotfunc((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4))`
  puis après avoir vu que la courbe coupe l'axe des x entre-1 et 1, on tape :
  `plotfunc((3x+2)^2+7*(3x+2)+5*(9x^2-4),x=-1..1)`
  On obtient après avoir fait un grossissement (cliquez sur `in` et sur `auto`) :



On tape :
`abscisse(inter(G2,droite(y=0)))`
On obtient : `[-2/3,1/18]`

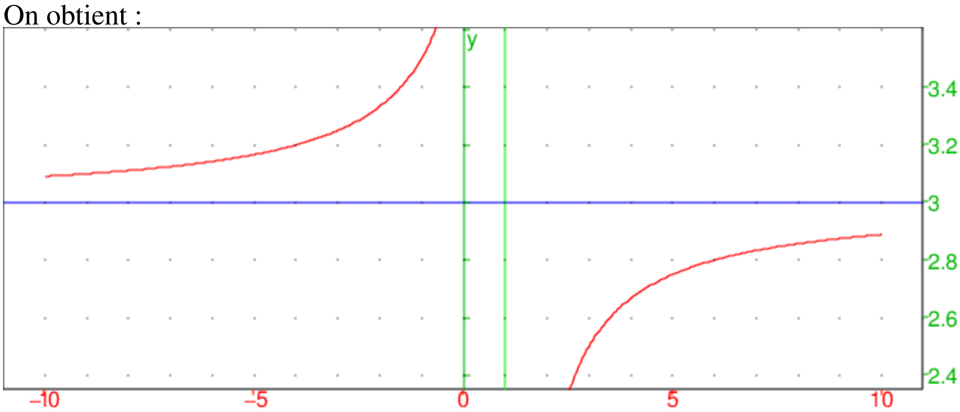
2. Résoudre les inéquations :

- $3(x-1) + 7(3x-2) < 6(x+1)$ On tape :
  `d1:=droite(y=3*(x-1)+7*(3x-2),affichage=rouge);`
  `d2:=droite(y=-6*(x+1),affichage=bleu)`
  On obtient :



On tape :
`abscisse(inter(d1,d2))`
On obtient : `[23/18]`
Les points de la droite bleue sont au dessus des points de la droite rouge lorsque $x > 23/18$.

- $\dfrac{3x-4}{x-1}$ $>= 3$ On tape :
```
plotfunc((3x-4)/(x-1),x,affichage=rouge),droite(y=3,affichage=
droite(x=1,affichage=vert)
```
On obtient :



Les points de la la courbe rouge sont au dessus des points de la droite bleue lorsque $x < 1$.

Chapitre 5

Systèmes d'équations

5.1 Résoudre un système par substitution

Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

La 1-ière équation donne :
$y=\dfrac{2x-8}{5}$
Donc le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{rl} y & =\dfrac{2x-8}{5} \\ 3x+\quad 4y & =2 \end{array}\right.$
En substituant y dans la deuxième équation, le système est équivalent à :
$\left\{\begin{array}{rl} y & =\dfrac{2x-8}{5} \\ 3x+\quad 4\dfrac{2x-8}{5} & =2 \end{array}\right.$
La 2-ième équation donne :
$15x+8x-32=10$
$23x=42$
$x=\dfrac{42}{23}$
En reportant cette valeur dans la 1-ière équation on obtient :
$y=\dfrac{2\frac{42}{23}-8}{5}$
$y=\dfrac{84-8*23}{23*5}=-\dfrac{4*25}{23*5}-\dfrac{20}{23}$
Le système :
$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$ admet donc comme solution : $x=\dfrac{42}{23}, y=-\dfrac{20}{23}$

Avec `Xcas`, on tape :
```
linsolve([2x-5y=8,3x+4y=2],[x,y])
```
ou bien
```
resoudre_systeme_lineaire([2x-5y=8,3x+4y=2],[x,y])
```
On obtient :
```
[42/23,-20/23]
```

5.2 Résoudre un système par combinaison

La méthode par combinaison consiste à éliminer une variable en remplacant une équation par une combinaison linéaire des 2 équations. Par exemple, on élimine x dans la 2-ième équation en faisant une combinaison des 2 équations ce qui donne une nouvelle 2-ième équation : le système est alors équivalent au système composé de la 1-ière équation et cette nouvelle équation.
Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

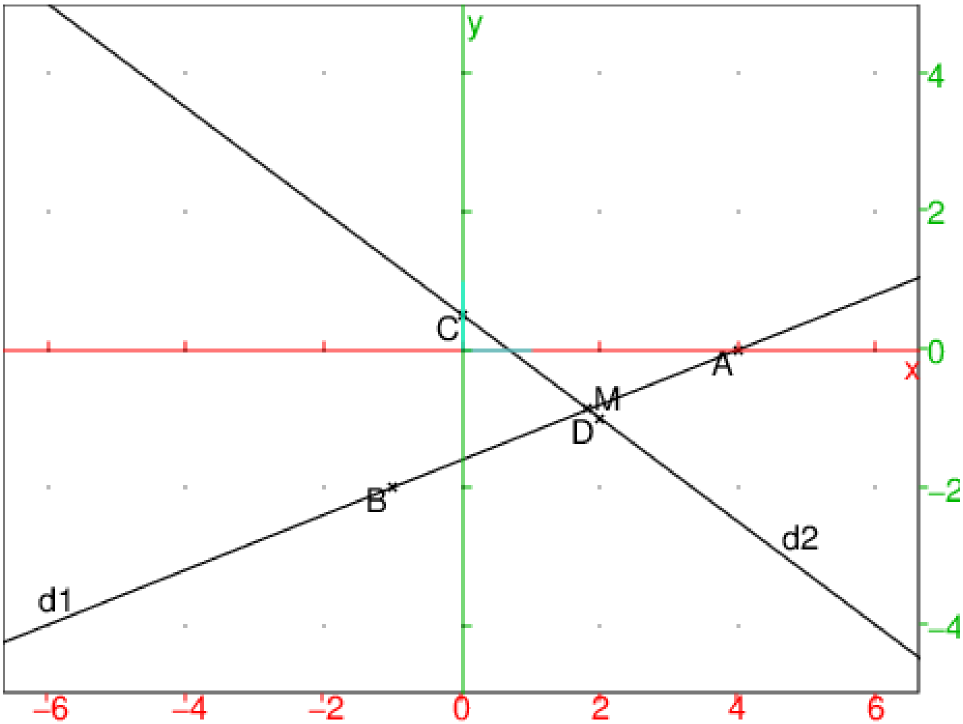
On remplace la deuxième équation par la combinaison :
3*1-ière équation -2*2-ième équation que l'on note :
$\left\{\begin{array}{ll} 2x-5y=8 & \quad |*3 \\ 3x+4y=2 & \quad |*-2 \end{array}\right.$
Donc le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{rrr} 2x & -5y= & 8 \\ & -23y= & 20 \end{array}\right.$
Donc $y=-\dfrac{20}{23}$
En reportant cette valeur dans la première équation on obtient :
$2x+5\dfrac{20}{23}=8$
$46x+5*20=8*23$
$46x=8*23-100=84$
$x=\dfrac{24}{23}$
Le système :
$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$ admet donc comme solution : $x=\dfrac{42}{23}, y=-\dfrac{20}{30}$

5.3 Résoudre un système graphiquement

Résoudre graphiquement le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=8 \\ 3x+4y=2 \end{array}\right.$$

Chacune de ces équations prises séparement est l'équation d'une droite et admet une infinité de solutions qui sont les coordonnées des points situés sur cette droite.
Ce système a donc comme solution les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation :
$2x-5y=8$ et $3x+4y=2$ Traçons ces 2 droites :
La droite d'équation $2x-5y=8$ passe par les points :
A de coordonnées $x=4, y=0$ et B de coordonnées $x=-1, y=-2$
La droite d'équation $3x+4y=2$ passe par les points :
C de coordonnées $x=0, y=1/2$ et D de coordonnées $x=2, y=-1$



Avec `Xcas`, on tape dans un niveau de géométrie $2d$:

```
d1:=droite(2x-5y=8)
d2:=droite(3x+4y=2)
```

On peut placer les points A, B, C, D en tapant :

```
A:=point(4)
B:=point(-1,-2)
C:=point(0,1/2)
D:=point(2,-1)
```

Le point d'intersection de d_1 et d_2 est obtenu en tapant :

```
M:=inter_droite(d1,d2)
coordonnees(M)
```

On obtient :

```
[42/23,-20/23]
```

On remarquera qu'en faisant juste le dessin sur une feuille de papier, on ne pourra pas en général, déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection mais seulement leurs valeurs approchées.

Exercice

Dans un repère orthonormé (O, x, y) représenter graphiquement les droites d_1 et d_2 qui ont comme équation respective $2x + y = 5$ et $2x - y = 3$

Soit A le point d'intersection de d_1 et d_2.

Déterminer graphiquement les coordonnées de A point d'intersection et vérifier le résultat obtenu

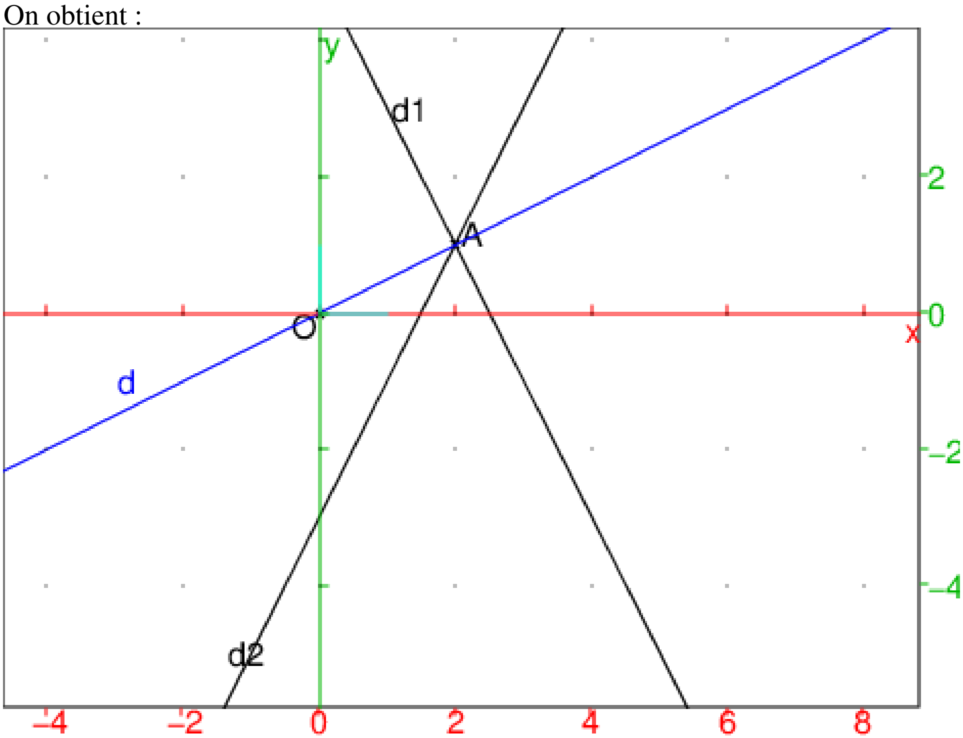
Déterminer l'équation de la droite OA.

Solution avec `Xcas`

On tape dans un niveau de géométrie $2d$:

```
O:=point(0); d1:=droite(2x+y=5);
d2:=droite(2x-y=3);
A:=inter_droite(d1,d2)
```

`d:=droite(0,A,affichage=4);`
On obtient :

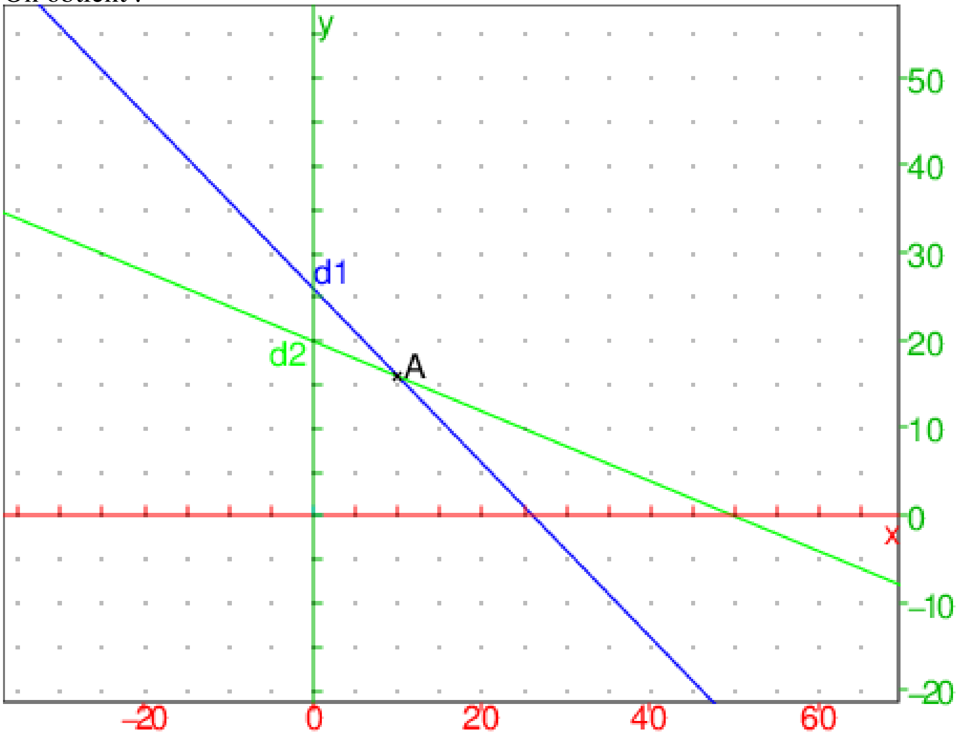


On tape :
`coordonnees(A);`
On obtient : `[2,1]`
et on vérifie que l'on a bien :
$2*2+1=5$ et $2*2-1=3$
On tape :
`equation(d);`
On obtient : `y=x/2`
On remarque que la somme des 2 équations élimine y. On va donc remplacer la 2-ième équation par la somme des 2 équations et le système est équivalent à :
$2x+y=5$ et $4x=8$ équivalent à
$x=2$ et $4+y=5$ équivalent à
$x=2$ et $y=1$
On tape avec `Xcas` :
`resoudre_systeme_lineaire([2x+y=5,4+y=5],[x,y])`
On obtient : `[2,1]`

5.4 Exercices se ramenant à la résolution d'un système

1. On paye une somme de 100 euros avec des x pièces de 2 euros et y billets de 5 euros. Le nombre de pièces et de billet est 26. Calculer le nombre de pièces et le nombre de billets. On donnera une solution à l'aide d'une méthode graphique, d'une méthode algébrique et d'une méthode arithmétique. Le problème est-il possible si le nombre de pièces et le nombre de billets est un nombre entier m quelconque.

Méthode graphique avec `Xcas`
On tape :
```
d1:=droite(x+y=26,affichage=bleu)
d2:=droite(2x+5y=100):;affichage(d2,vert)
legende(20*i,"d2",quadrant3,vert)
A:=inter_droite(d1,d2)
```
On obtient :



On tape :
```
coordonnees(A)
```
On obtient :
```
[10,16]
```
Donc il y a 10 pièces de 2 euros et 16 billets de 5 euros.
Méthode algébrique avec `Xcas`
On tape :
```
linsolve([x+y=26,2x+5y=100],[x,y])
```
On obtient :
```
[10,16]
```
Donc il y a 10 pièces de 2 euros et 16 billets de 5 euros.
Méthode arithmétique
On cherche $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ tel que :
$x + y = 26$ et $2x + 5y = 100$
Pour résoudre $2x + 5y = 100$ avec des entiers relatifs on cherche une solution particulière de $2x + 5y = 100$ et on ajoute la solution générale de $2x + 5y = 0$ qui est $x = -5k, y = 2k$.
Pour avoir une solution particulière de $2x + 5y = 100$, avec des entiers de $\mathbb{Z}$, avec `Xcas`, on tape :
```
abcuv(2,5,100)
```
On obtient : `[50,0]`

Donc $x = 50 - 5k, y = 2k$.
On veut que $x + y = 26$ donc $50 - 3k = 26$ soit $k = 8$ donc :
$x = 50 - 5 * 8 = 40$ et $y = 2 * 8 = 16$
Soit le système $x + y = m$ **et** $2x + 5y = 100$
On a $20 \leq m \leq 50$ car :
20 est la valeur minimum de m qui correspond au nombre de billets de 5 euros qu'il faut pour payer 100 euros
50 est la valeur maximum de m qui correspond au nombre de pièces de 2 euros qu'il faut pour payer 100 euros
Méthode graphique avec `Xcas`, on tape :

```
assume(m=[0,20,50,1]) d1:=droite(x+y=m,affichage=bleu)
d2:=droite(2x+5y=100):;affichage(d2,vert)
legende(20*i,"d2",quadrant3,vert)
A:=inter_droite(d1,d2)
evalf(coordonnees(A))
```

Il y a alors un curseur m qui va de 1 en 1 de 20 jusque 50.
On peut suivre les valeur de la dernière commande est voir que pour
$m = 23$ les coordonnées de A sont (5,18),
$m = 26$ les coordonnées de A sont (5,16),
$m = 29$ les coordonnées de A sont (15,14), etc..
On peut donc conjecturer que $20 - m$ doit être un multiple de 3.
Méthode algébrique
Avec `Xcas`, on tape :

```
linsolve([x+y=m,2x+5y=100],[x,y])
```

On obtient :

```
[5/3*m-100/3,-2/3*m+100/3]
```

On tape :

```
factoriser([5/3*m-100/3,-2/3*m+100/3])
```

On obtient :

```
[5*(m-20)/3,-2*(m-50)/3]
```

les nombres x et y doivent être des entiers naturels donc m doit satisfaire aux conditions :
$m - 20 \geq 0, 50 - m \leq 0$ et
$m - 20$ et $m - 50$ doivent êtr e des multiples de 3.
Donc $20 \leq m \leq 50$, et $m = 20 + 3 * k = 50 - 3 * p$ ($k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)
soit $3(k + p) = 30$ soit $k + p = 10$ ce qui fait que l'on doit avoir :
$m = 20 + 3k$ pour $k = 0..10$.
Avec `Xcas`, on tape :

```
M:=(20+3k)$(k=0..10)
```

On obtient les valeurs de m possibles :

```
20,23,26,29,32,35,38,41,44,47,50
```

On tape :

```
SM:=([5*(M[k]-20)/3,-2*(M[k]-50)/3,20+3k])$(k=0..10)
```

On obtient les solutions $SM[k]$ et les valeurs de $m = M[k]$ correspondantes :

```
[0,20,20],[5,18,23],[10,16,26],[15,14,29],[20,12,32],
[25,10,35], [30,8,38],[35,6,41],[40,4,44],[45,2,47],
[50,0,50][0,20],[5,18],[10,16],[15,14],[20,12],
```

`[25,10],[30,8],[35,6],[40,4],[45,2],[50,0]`

Méthode arithmétique

Si $2x+5y=100$ avec $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$ c'est que :
x est divisible par 5 puisque $2x=100-5y=5(20-y)$ donc $x=5k$
y est divisible par 2 puisque $5y=100-2x=2(50-x)$ donc $y=2p$
Le système devient :
$x+y=5k+2p=m$ et $2x+5y=10k+10p=100$ soit
$5k+2p=m$ et $p=10-k$
$5k+20-2k=m$ et $p=10-k$
Donc $m=20+3k=50-3p$

2. Trouver les 2 facteurs d'un produit sachant que l'un est le triple de l'autre et que si on augmentait chacun de 4 le produit augmenterait de 224.
   Solution
   Soient x et y les 2 facteurs on a :
   $x=3y$ et $(x+4)(y+4)=xy+224$
   Puisque $(x+4)(y+4)=xy+4(x+y+4)$, il faut résoudre le système :
   $x=3y$ et $x+y=224/4-4=56-4=52$ ce qui revient à résoudre le système :
   $x=3y$ et $3y+y=52$
   Donc $y=13$ et $x=39$ Vérifions :
   $xy=13*39=507$ et $17*43=731$ et on a bien $731-507=224$
   Avec `Xcas`, on tape :
   `linsolve([x=3y,(x+4)*(y+4)=x*y+224],[x,y])`
   On obtient :
   `[39,13]`

3. J'ai trois fois l'age de mon fils et quand mon fils aura l'age que j'ai nous aurons ensemble 104 ans.
   Quel est mon age et quel est celui de mon fils ?
   Solution
   Soient x mon age et y celui de mon fils. On a :
   $x=3y$ et mon fils aura l'age que j'ai dans $x-y$ ans Dans $x-y$ ans j'aurai $x+x-y=2x-y$ ans et mon fils aura x ans. Ensemble on aura donc $2x-y+x=104$
   Il faut donc résoudre le système :
   $x=3y$ et $3x-y=104$ ce qui revient à résoudre le système :
   $x=3y$ et $9y-y=8y=104$
   Donc $y=104/8=13$ et $x=39$.
   Vérifions :
   Dans $39-13=26$ ans, j'aurai $39+26=65$ ans et mon fils aura $13+26=39$ ans. Ensemble on aura bien $65+39=104$ ans
   Avec `Xcas`, on tape :
   `linsolve([x=3y,2x-y+x=104],[x,y])`
   On obtient :
   `[39,13]`

Chapitre 6

Notion de fonction

Il ne faut pas confondre expression et fonction. Une expression est une combinaison de nombres et de variables reliés par des opérations alors qu'une fonction associe à une variable une expression. Par exemple, `a:=x^2+2*x+1` définit une expression et `b(x):=x^2+2*x+1` définit une fonction. On obtient la valeur de l'expression `a` en 0, avec `subst(a,x=0)` et la valeur de la fonction `b` en 0, avec `b(0)`.

6.1 Image d'un nombre par une fonction

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cela veut dire que pour tout a dans $\mathbb{R}$ f associe le nombre $f(a)$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f(a)$ estv l'image de qa par f.
Exemple
Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Trouver l'image des nombres -2,-1,0,1,2 Avec `Xcas`, on tape :
`f(x):=x^3-3x+2`
`f(k)$(k=-2..2)`
On obtient les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2)$:
`0,4,2,0,4`
Factoriser $f(x)$.
$f(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour $x = -2$ donc $(x-1)$ et $(x+2)$ sont des facteurs de $f(x)$.
Donc $f(x) = (x-1) * (ax^2 + bx + c) = x^3 - 3x + 2$
On en déduit par identification que $a = 1$, $c = -2$ et $b - a = 0$ donc :
$f(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$
$x^2 + x - 2$ s'annule lorsque $x = -2$ donc ;
$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ d'où :
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$
Avec `Xcas`, on tape :
`factoriser(f(x))`
On obtient :
`(x-1)^2*(x+2)`

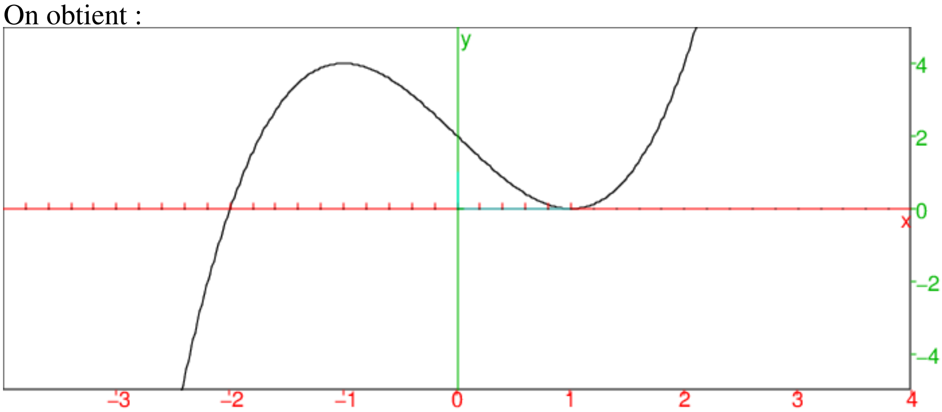
6.2 Antécédent(s) d'un nombre par une fonction

Les ou l'antécédent(s) d'un nombre b par une fonction f sont les nombres a tels que $f(a) = b$.
Exemple
Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Trouver les antécédent(s) des nombres 0,2,4.
Avec `Xcas`, on tape :
`solve(f(x)=0,x)`
On obtient :
`[-2,1]`
On tape :
`solve(f(x)=2,x)`
On obtient :
`[-(sqrt(3)),0,sqrt(3)]`
On tape :
`resoudre(f(x)=4,x)`
On obtient :
`[-1,2]`

6.3 Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées $x, f(x)$ dans un repère Oxy

Exemple
Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Tracer le graphe de f sur l'intervalle [-3,3].
On tape :
`plotfunc(f(x),x=-3..3))`
On obtient :



Chapitre 7

Fonctions linéaires et affines

Une fonction linéaire réelle est une fonction de la forme $f(x) = ax$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$
Une fonction affine réelle est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ avec $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

7.1 Représentation d'une fonction linéaire

Soit un repère orthonormé Oxy.
La représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ est une droite passant par l'origine O du repère et qui a comme de pente a. On dit que cette droite a pour équation $y = ax$
Avec `Xcas`, on ouvre un niveau de géométrie 2d (Alt+g).
On clique sur `Edit` de ce niveau et on choisit `Ajouter paramètre`.
Une boite de dialogue préremplie s'ouvre : on valide avec `OK` et on obtient au niveau 1 comme ligne de commande :
`assume(a=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `a`.
On tape :
`droite(y=a*x)`
Puis on fait bouger le curseur.
On obtient :
`Le graphe de la droite d'équation` $y = ax$ `pour différentes valeurs de` a.

7.2 Représentation d'une fonction affine

Soit un repère orthonormé Oxy.
La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite de pente a passant par le point B de coordonnèes $0, b$ On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$
Avec `Xcas`, on ouvre un niveau de géométrie 2d (Alt+g).
On clique sur `Edit` de ce niveau et on choisit `Ajouter paramètre`.

Une boite de dialogue préremplie s'ouvre : on valide avec `OK` et on obtient au niveau 1 comme ligne de commande :
`assume(a=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `a`.
On refait la même chose ou on recopie la commande pour avoir au niveau 2
`assume(b=[0,-5,5,0.1])`
cela provoque la mise en place d'un curseur (sous le pavé situé à droite de lécran graphique) qui permet de changer les valeurs de `b`.
On tape :
`droite(y=a*x+b)`
Puis on fait bouger le curseur `a` et le curseur `b`.
On obtient :
Le graphe de la droite d'équation $y = ax+b$ pour différentes valeurs de a et de b

7.3 Représentation graphique des solutions (x, y) de l'équation $ax + by + c = 0$

On suppose que soit $b \neq 0$ soit $b = 0$ et $a \neq 0$
Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.
Donc si $b \neq 0$, les points de coordonnées (x, y) de l'équation $ax + by + c = 0$ se trouvent sur la droite d'équation $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.
Si $b = 0$ et $a \neq 0$, a l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $ax + c = 0$.
Puisque $a \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ est équivalente à l'équation $x = -\frac{c}{a}$.
Les points de coordonnées (x, y) de l'équation $x = -\frac{c}{a}$ ont tous la même abscisse et se trouvent donc sur une droite parallèle à l'axe des y et qui a pour équation $x = -\frac{c}{a}$.
Donc l'équation d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$ ce qui représente à la fois les droites parallèles à l'axe des y (quand $b = 0$) et les droites d'équation de la forme $y = mx + p$ (avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ quand $b \neq 0$).

7.4 Fonction affine définie par 2 points

Soit une droite passant par le point A de coordonnées a_1, a_2 et par le point B de coordonnées b_1, b_2. On cherche l'équation de cette droite.
Si $a_1 \neq b_1$ l'équation de cette droite peut s'écrire $y = ax + b$.
On cherche alors a et b qui sont solution du système :
$a_2 = a_1 a + b$ et $b_2 = b_1 a + b$
On tape :
`droite(point(1,2),point(3,-1))`
On obtient :
le dessin de la droite passant par les points (1,2) et (3,-1)

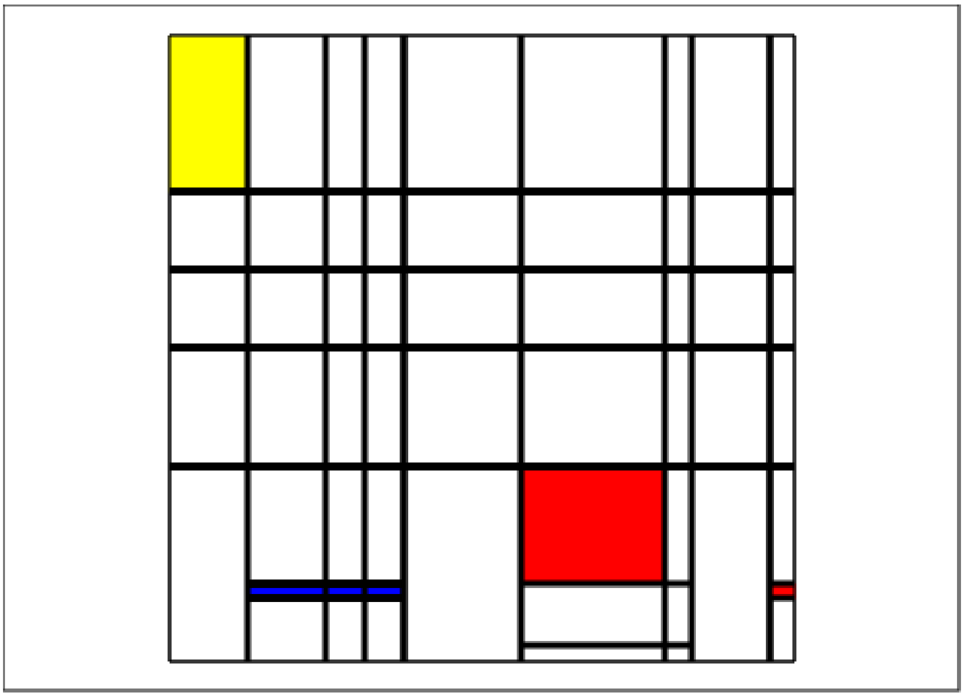
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(3,-1)))`
On obtient :`y=(-3*x/2+7/2)`
On tape :
`droite(point(1,2),point(3,2))`
On obtient :
`le dessin de la droite parallèle à l'axe des` y `passant par le point (0,2)`
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(3,2)))`
On obtient :`y=2`
On tape :
`droite(point(1,2),point(1,3))`
On obtient :
`le dessin de la droite parallèle à l'axe des` x `passant par le point (1,0)`
On tape :
`equation(droite(point(1,2),point(1,3)))`
On obtient :`x=1`
On tape :
`equation(droite(point(a1,a2),point(b1,b2)))`
On obtient :`y=((a2-b2)*1/(a1-b1)*x+(a1*b2-a2*b1)/(a1-b1))`
qui est bien sûer valable que si $a_1 \neq b_1$!

7.5 Fonction affine définie par 1 point et sa pente

On tape :
`equation(droite(point(1,2),pente=-1))`
On obtient :`y=(-x+3)`
On tape :
`equation(droite(point(0,b),pente=a))`
On obtient :`y=(a*x+b)`
On tape :
`equation(droite(point(b1,b2),pente=a))`
On obtient : `y=(-a*b1+b2+a*x)`

7.6 Reproduction d'un tableau de Piet Mondrian

Piet Mondrian est un peintre hollandais (1872 -1944). Longtemps peintre de vaches et de prairies, il a créé vers 1917 le néo-plasticisme.
Voici le tableau à reproduire :



Et voici la suite d'instructions :

```
rectangle(6i,1+6i,2,affichage=rempli+3);
rectangle(1+0.8i,3+0.8i,1/10,affichage=rempli+4);
rectangle(9/2+i,6.33+i,0.8,affichage=rempli+1);
segment(1+0.8i,3+0.8i, affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(1+1*i,3+1*i, affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(5i/2,8+5i/2,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(3,3+8*i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(5i,8+5i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(6i,8+6i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
segment(1,1+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(2,2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(5/2,5/2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(3,3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(9/2,9/2+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(19/3,19/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(20/3,20/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3,23/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(9/2+i,20/3+i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(9/2+0.2i,20/3+0.2i,affichage=epaisseur_ligne_3);
segment(4i,8+4i,affichage=epaisseur_ligne_4);;
rectangle(23/3+0.8*i,8+0.8*i,6/10,affichage=rempli+1);
segment(23/3+0.8i,8+0.8i, affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3+1*i,8+1*i, affichage=epaisseur_ligne_3);;
segment(23/3,23/3+8i,affichage=epaisseur_ligne_3);;
carre(0,8);
```

7.7 Grandeurs proportionnelles

On dit que y et x sont proprotionnels si y/x est égales à une constante a qui s'appelle le coefficient de proportionnalité.
Par exemple le prix y d'un tissu est proportionnel à sa longueur x.
Exercice
Un pain de 400g est vendu dans un supermarché 0.85 euros.
Sur l'étiquette il est marqué : Prix au kilo 1.89 euros.

- Si ce prix au kilo était exact quel devrait être le prix de ce pain de 400g ?
- Si ce prix au kilo était exact quel devrait être le poids de ce pain qui coute 0.85 euros ?
- Quel est le prix réel au kilo ?

Solution

- 1 kilo=1000 grammes et 400 grammes=0.4 kilo.
  Si 1 kilo coute 1.89 euros cela veut dire que le prix y en euros est proportionnel au poids x du pain en kilo et que le coefficient de proportionnalité vaut 1.89 et on a $y = 1.89 * x$
  Donc un pain 400grammes=0.4 kilos doit couter :
  1.89*0.4=0.756 euros, soit environ 0.76 euros.
- si le prix y vaut 0.85 euros c'est que le poids x de ce pain vérifie la relation $0.85 = 1.89 * x$ donc :
  $x = 0.85/1.89 = 0.449735449735$
  Le poids de ce pain devrait être d'environ 450 grammes.
- Le prix réel au kilo est égal à y/x c'est à dire à :
  0.85/0.4=2.125 euros.

7.8 Pourcentage

7.8.1 Devis HT et TTC

Un artisan doit faire un devis qu'il estime à 500 euros HT (hors taxes).
A combien se monte le devis avec la TVA si celle-ci est de 19.6%.
Solution
Le montant de la TVA est :
500*19.6*0.01=500*0.196=98 Le montant TTC est donc :
500+98 =598 euros
ou bien directement ; le montant TTC est :
500*1.196=598 euros

Un artisan a fait un devis d'un montant de 600 euros TTC (avec la TVA).
A combien se monte le devis HT (hors taxes) si la TVA est de 19.6% ? si la TVA est de 7% ?
Solution
Si la TVA est de 19.6%, le montant HT est donc de :
600/1.196=501.67 euros.
Si la TVA est de 7%, le montant HT est donc de :
600/1.07=560.74 euros.

7.8.2 Placement sur un livret

On place sur un livret la somme de 10000 euros à un taux annuel d'intérêt de 2.5% (net d'impôts de de taxes).
Les intérêts étant versés sur le livret, quelle somme a-t-on obtenue au bout d'un an sur le livret ?
Au bout d'un an, par combien la somme initiale a-t-elle été multipliée ?
Quelle somme a-t-on obtenue au bout de 2 ans ? 5 ans ?
Solution
Au bout d'un an, on a 10000*2.5/100= 10000*0.025=250 euros d'intérêts donc au total on a sur le livret : 10000+10000*0.025=10000*1.025=10250 euros.
Au bout d'un an, la somme initiale a-t-elle été multipliée par 1.025.
Au bout de 2 ans, on a 10250*0.025=256.25 euros d'intérêts donc au total on a sur le livret : 10250+256.25=10506.25 euros ou encore
le total se monte à $10000 * 1.025 * 1.025 = 10000 * 1.025^2 = 10506.25$ euros.
Au bout de 5 ans, on a $10000 * 1.025^5 = 11314.08$ euros sur le livret.
On place sur un livret la somme de S euros à un taux annuel d'intérêt de $t * 0.01$ (net d'impôts de de taxes).
Quelle somme a-t-on obtenue au bout d'un an ?
Les intérêts étant versés sur le compte, ils rapportent aussi des intérêt.
Quelle somme a-t-on obtenue au bout de n ans ?
Au bout d'un an on a : $S * (1 + t * 0.01)$ euros
Au bout de n ans on a : $S * (1 + t * 0.01)^n$ euros

7.9 Cercle et Arc de cercle

Voici les commandes de `Xcas` qui permettent de faire un cercle :
`cercle` ou `circle` permet de définir un cercle et un arc de cercle. `arc` permet de définir un arc par 2 points et son angle au centre. Si on veut dessiner un cercle `cercle` ou `circle` a 1 ou 2 arguments :

- son équation.
  Par exemple `cercle((x-1)^2+(y-2)^2=1)`
- son centre et son rayon le centre étant un point et le rayon un nombre réel.
  Par exemple : `cercle(point(1,2),1)`
- son diamètre : les arguments sont alors 2 points.
  Par exemple : `cercle(point(1,2),point(0,3))`

Si on veut dessiner un arc de cercle AB on utilise :

1. `cercle` ou `circle` a 4 arguments
   - son centre, son rayon et les angles aux centres des points A et B (les arguments sont alors un point (pour le centre), 3 nombres réels pour le rayon et les 2 angles au centre). C'est l'axe définit par le diamètre qui détermine l'origine pour la mesure des angles au centre.
     Par exemple : `cercle(point(1,2),1,pi/4,pi/2)`
   - son diamètre et les angles aux centres des points A et B (les arguments sont alors 2 points et 2 nombres réels).
     Par exemple : `cercle(point(1,2),point(0,3),pi/6,2pi/3)`
     Attention

`cercle(point(0,3),point(1,2),pi/6,2pi/3)` et `cercle(point(1,2),point(0,3`
sont des arcs symétriques par rapport au diamètre

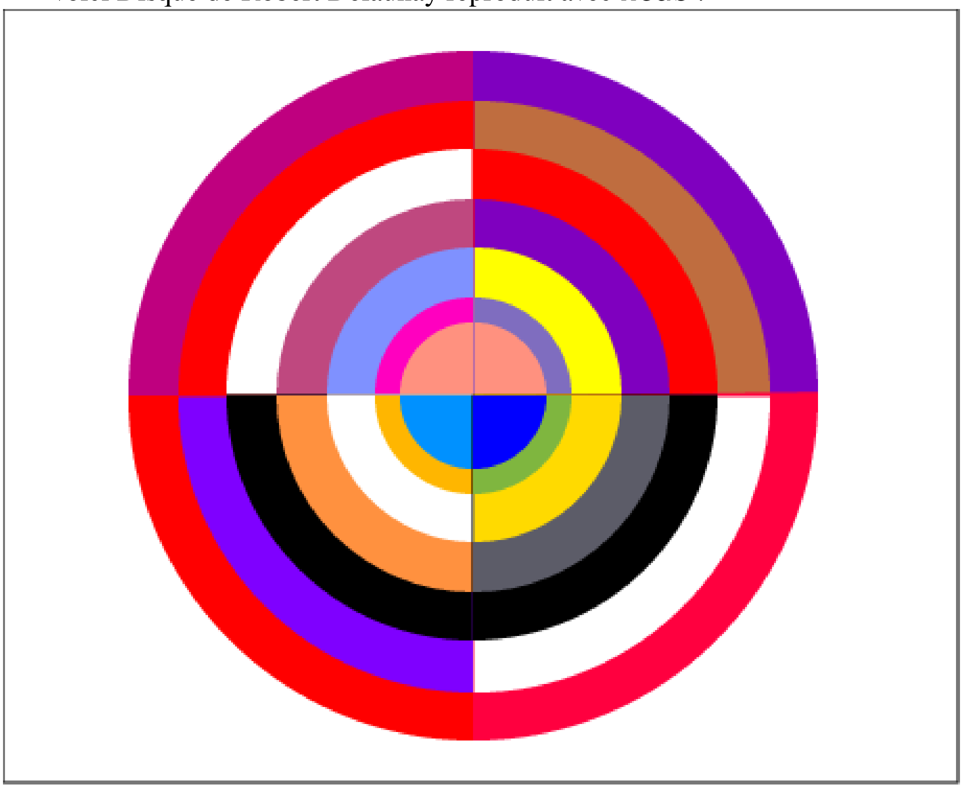
2. `arc` avec 3,4 ou 5 arguments
   — les 3 arguments sont 2 points qui sont les extrémités de l'arc et l'angle au centre.
   Par exemple : `arc(point(1,2),point(0,3),pi/2)`
   — avec 4 ou 5 arguments, on rajoute le nom d'1 ou 2 variables qui donneront le centre et le rayon du cercle contenant cet arc.
   Par exemple : `arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,C)` dessinne l'arc et le point `C` qui est le centre du cercle supportant l'arc (`coordonnees(C)` renvoie `[0,2]`) ou
   `arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,C,r)` dessinne l'arc et le point `C` qui est le centre du cercle supportant l'arc (`coordonnees(C)` renvoie `[0,2]`) et `r` renvoie `1`.

Remarque
On peut rajouter un dernier argument aux commandes trécédentes pour gérer l'affichage par exemple :

```
cercle(point(1,2),point(0,3),pi/6,2pi/3,affichage=rempli+4)
arc(point(1,2),point(0,3),pi/2,affichage=rempli+1)
```

7.10 Reproduction d'un tableau de Robert Delaunay

Voici Disque de Robert Delaunay reproduit avec `Xcas` :

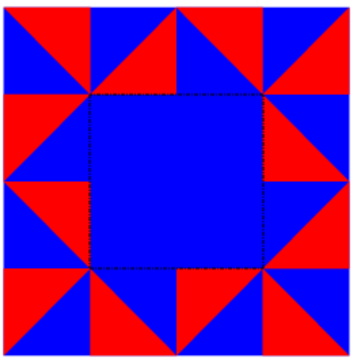


```
cercle(0,7,0,pi/2,affichage=rempli+192);
cercle(0,6,0,pi/2,affichage=rempli+123);
```

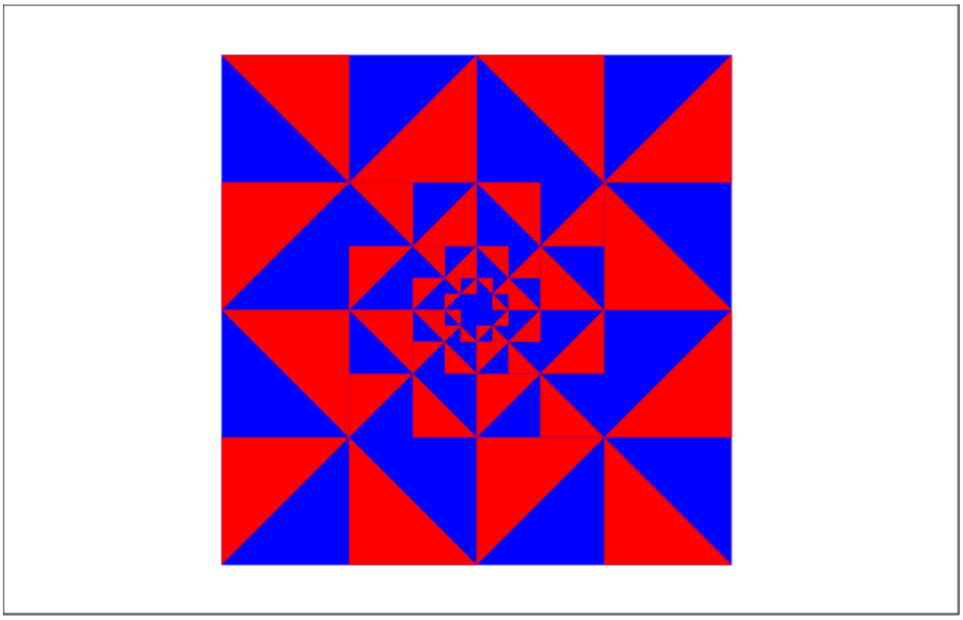
```
cercle(0,5,0,pi/2,affichage=rempli+88);
cercle(0,4,0,pi/2,affichage=rempli+192);
cercle(0,3,0,pi/2,affichage=rempli+95);
cercle(0,2,0,pi/2,affichage=rempli+195);
cercle(0,1.5,0,pi/2,affichage=rempli+172);
cercle(0,7,pi/2,pi,affichage=rempli+160);
cercle(0,6,pi/2,pi,affichage=rempli+88);
cercle(0,5,pi/2,pi,affichage=rempli+7);
cercle(0,4,pi/2,pi,affichage=rempli+164);
cercle(0,3,pi/2,pi,affichage=rempli+236);
cercle(0,2,pi/2,pi,affichage=rempli+208);
cercle(0,1.5,pi/2,pi,affichage=rempli+172);
cercle(0,7,pi,3pi/2,affichage=rempli+88);
cercle(0,6,pi,3pi/2,affichage=rempli+232);
cercle(0,5,pi,3pi/2,affichage=rempli);
cercle(0,4,pi,3pi/2,affichage=rempli+132);
cercle(0,3,pi,3pi/2,affichage=rempli+7);
cercle(0,2,pi,3pi/2,affichage=rempli+93);
cercle(0,1.5,pi,3pi/2,affichage=rempli+220);
cercle(0,7,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+128);
cercle(0,6,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+7);
cercle(0,5,3pi/2,pi*2,affichage=rempli);
cercle(0,4,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+24);
cercle(0,3,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+94);
cercle(0,2,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+117);
cercle(0,1.5,3pi/2,pi*2,affichage=rempli+216);
```

7.11 Un dessin récursif

Soit un carré de côté $2 * n$. On réalise sur ce carré le dessin suivant :



le carrè dessiné en pointillé a comme côté n et le bord est constitué de triangles rectangles isocèles de côté $n/2$.
On fait ensuite le même dessin sur le carré en pointillé etc ...
Voici par exemple le carré lorsque l'on a reproduit le dessin 4 fois :



Voici le programme (on ne dessine que les triangles rouges) :

```
carres(n):={
 local L;
 L:=NULL;
 si n>0.5 alors
  L:=L,triangle(n/2,n,n/2+i*n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(n/2*(1+i),n+i*n/2,n+i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(n/2*(1+i),n/2+i*n,i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(i*n/2,i*n,i*n/2-n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(i*n/2*(1+i),i*n-n/2,-n+i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(i*n/2*(1+i),i*n/2-n,-n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-n/2,-n,-n/2-i*n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-n/2*(1+i),-n-i*n/2,-n-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(-n/2*(1+i),-n/2-i*n,-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-i*n/2,-i*n,-i*n/2+n/2,affichage=rempli+1);
  L:=L,triangle(-i*n/2*(1+i),-i*n+n/2,n-i*n,affichage=rempli+1);
  L:=L, triangle(-i*n/2*(1+i),-i*n/2+n,n,affichage=rempli+1);
  L:=L,carres(n/2);
fsi;
return L}:;
```

Puis on fait le fond bleu avec :
`carre(-8*(1+i),8*(1-i),affichage=rempli+4)`
On tape :
`carre(-8*(1+i),8*(1-i),affichage=rempli+4),carres(8)` et on obtient le dessin ci-dessus.

Chapitre 8

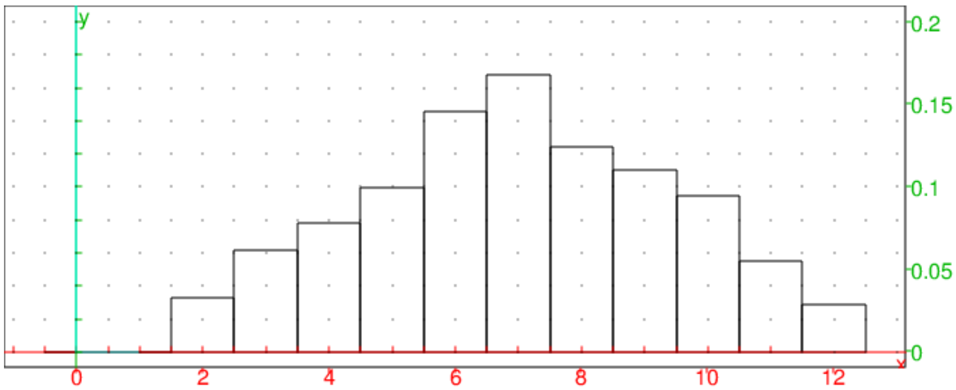
Statistiques

8.1 Série statistique donnée par une liste

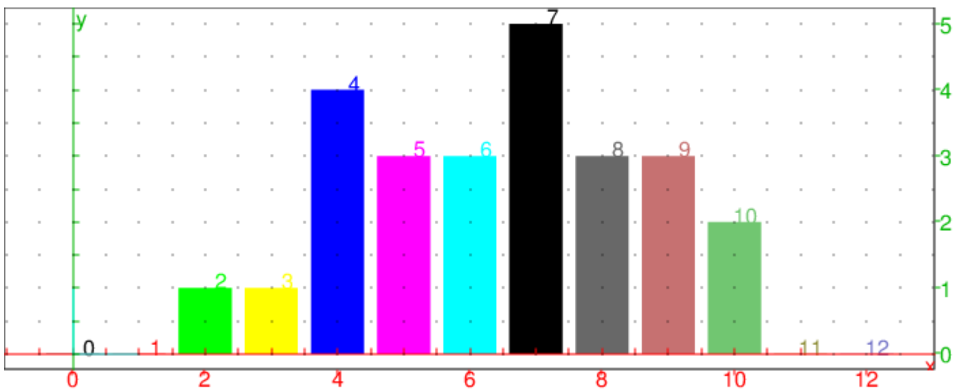
On jette 2 dés cubiques non pipés et on note la somme obtenue dans une liste `R`.
Simuler ce jet 25 fois de suite à l'aide de `Xcas`.
Calculer les fréquences de chaque issue et construire l'histogramme (i.e. le diagramme en bâtons) correspondant.
Simuler ce lancer 40 fois de suite à l'aide du tableur de `Xcas`.
Simuler ce lancer 1000 fois de suite à l'aide de `Xcas`.
Calculer les fréquences de chaque issue et constriure le diagramme en bâtons correspondant.

Avec `Xcas`, on tape dans une ligne de commande :
```
R:=[]; pour j de 1 jusque 25 faire R:=append(L,alea(6)+alea(6)+2);fpour;
```
ou bien on tape :
```
R:=[(alea(6)+alea(6)+2)$(k=1..25)]
```
En effet `alea(6)` renvoie un nombre choisi aléatoirement parmi les nombres `0,1,2,3,4,5` donc `alea(6)+1` renvoie un nombre choisi aléatoirement parmi les nombres `1,2,3,4,5,6`.
Attention
`alea(6)+alea(6)+2` n'est pas égal à `2*alea(6)+2` et n'est pas ègal non plus à `alea(11)+2`.
Puis on utilise `count_eq(k,R)` qui compte le nombre d'éléments de la liste `R` égaux à `k` pour `k` allant de 0 à 12 et on tape :
```
[count_eq(k,R)$(k=0..12)]
```
Ou bien on tape directement :
`L:=[0$ 13]` cela crée une liste formée de 13 zéros.
```
R:=NULL;
```
cela crée une séquence vide
```
pour j de 1 jusque 25 faire k:=alea(6)+alea(6)+2;R:=R,k;L[k]:=L[k]+1;fpour;
```
cela effectue 25 jets de 2 dés et on crée la séquence `R` qui donne la suite des résultats et la liste `L` qui compte dans `L[k]` le nombre de fois que `k` a été obtenu.
```
R:=[R];
```
cela transforme la séquence `R` en une liste.
On obtient par exemple pour `R` :

`[7,8,8,3,10,5,9,4,2,7,9,6,5,10,7,7,6,6,7,4,4,4,9,5,8]`
On obtient alors pour `L` :
`[0,0,1,1,4,3,3,5,3,3,2,0,0]`
Les frequences sont donc `L/25`. On obtient
`[0,0,1/25,1/25,4/25,3/25,3/25,1/5,3/25,3/25,2/25,0,0]`
On tape :
`histogramme([[k,L[k]]$(k=0..12)])`
Ou on tape :
`histogramme(R,0.5,1)`
On obtient :

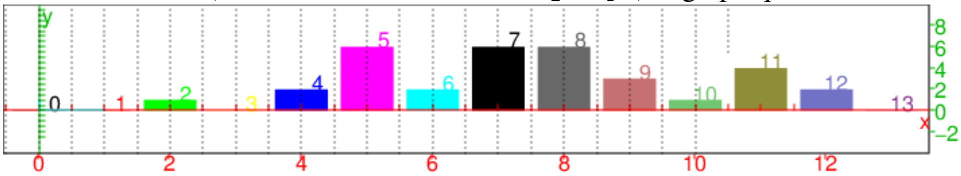


ou bien on tape :
`diagramme_batons([[k,L[k]]$(k=0..12)])`
On obtient :



Avec le tableur
On ouvre le tableur avec par exemple avec :
`Alt+t`
ou avec le menu :
`Tableur->Nouveau tableur`
qui propose 40 lignes de 0 à 39. On appuie donc sur `OK`.
Dans `A` on met les nombres entiers 0,1..39 :
pour cela on met dans `A0` : `0` et dans `A1` : `=A0+1`
puis on sélectionne `A1` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans `B` on met le résultat des 40 jets :
pour cela on met dans `B0` : `alea(6)+alea(6)+2`

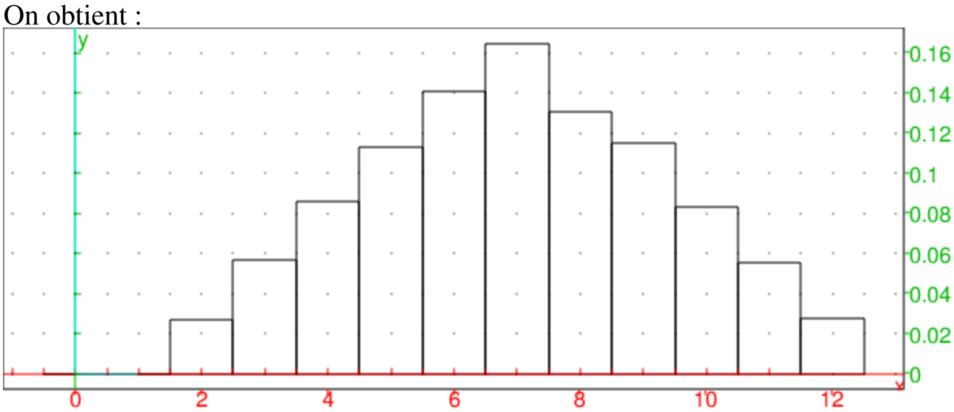
puis on sélectionne `B0` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans `C2` on va mettre le nombre de fois qu'il y a 2 dans `B` et dans `C3` on mettre le nombre de fois qu'il y a 3 dans `B` etc...
Pour cela, on tape dans `C2` `:=count_eq(A2,[$B$0:$B$39])` puis on sélectionne `C2` et on tape `Ctrl+d` pour remplir vers le bas.
Dans le menu `Maths` du tableur, on sélectionne :
`stats-1d->diagramme_batons` et on met `A2:A12,C` dans plage de cellule et `D0` comme cellule cible.
On obtient dans `D0 :=diagramme_batons([[2,1],...[12,0]])`
et sous le tableur (ou à côté si on a décoché `Paysage`) le graphique :



Pour 1000 lancers,
on tape directement dans une ligne de commande :

```
LL:=[0$ 13]
pour j de 1 jusque 1000 faire
k:=alea(6)+alea(6)+2;LL[k]:=LL[k]+1;fpour;
```

On obtient :
`[0,0,33,62,78,100,146,168,124,110,95,55,29]`
Les 2 premiers 0 signifient que le score obtenu en jetant 2 dés n'est jamais nul et jamais égal à 1, puis 33 signifie que 2 a èté obtenu 33 fois lorsqu'on a fait 1000 lancers etc...
Les fréquences sont donc `LL/1000`
On obtient
`[0,0,33/1000,31/500,39/500,1/10,73/500,21/125,31/250,`
`11/100,19/200,11/200,29/1000]`
On tape :
`evalf(LL/1000,3)`
On obtient :
`[0.0,0.0,0.033,0.062,0.078,0.1,0.146,0.168,0.124,`
`0.11,0.095,0.055,0.029]`
On tape :
`histogramme([[k,LL[k]]$(k=0..12)])`
On obtient :



On peut aussi utiliser :
`=diagramme_batons([[k,LL[k]]$(k=0..12)])`
Calcul à la main les fréquences théoriques
Il y a en tout $6^2 = 36$ possibilités.
Calculons parmi ces 36 possibilités combien ont comme somme 2, ont comme somme 3,...,ont comme somme 12 :

- 2 est obtenu si on a fait (1,1) donc 1 fois
- 3 est obtenu si on a fait (1,2) ou (2,1) donc 2 fois
- 4 est obtenu si on a fait (1,3), (2,2) ou (3,1) donc 3 fois
- 5 est obtenu si on a fait (1,4), (2,3), (3,2) ou (4,1) donc 4 fois
- 6 est obtenu si on a fait (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) ou (5,1) donc 5 fois
- 7 est obtenu si on a fait (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) ou (6,1) donc 6 fois
- 8 est obtenu si on a fait (2,6), (3,5), (4,4) (5,3) ou (6,2) donc 5 fois
- 9 est obtenu si on a fait (3,6), (4,5) (5,4) ou (6,3) donc 4 fois
- 10 est obtenu si on a fait (4,6) (5,5) ou (6,4) donc 3 fois
- 11 est obtenu si on a fait (5,6) ou (6,5) donc 2 fois
- 12 est obtenu si on a fait (6,6) donc 1 fois

On vérifie (1+2+3+4+5)*2+6=36
Les fréquences théoriques de 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 sont donc :
`1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36` On tape :
`evalf([1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6,5/36,1/9,1/12,1/18,1/36],3)`
On obtient :
`[0.028,0.056,0.083,0.111,0.139,0.167,0.139,0.111,0.083,0.056,0.028]`

8.2 Série statistique donnée par un tableau ou un graphique

Chapitre 9

Probabilités

9.1 Équiprobabilité

On jette 3 dés à 6 faces. On suppose que ces 3 dés ne sont pas pipés (i.e. il y a équiprobabilité d'obtenir chaque face)
On ordonne par ordre croissant les 3 valeurs obtenues : m, d, M.
A gagne si $M - m < d$ et sinon c'est B qui gagne.
Le jeu est-il équitable ?

Il y a $6^3 =$ possibilités il faut calculer le nombres de possibilités qui correspondent à $M - m > d$.
On peut faire cela avec un programme en utilisant les fonctions :
`alea` ou `rand`, `max` et `min` de `Xcas` :
`a:=rand(6)+1;b:=rand(6)+1;c:=rand(6)+1;` donne les 3 valeurs obtenues
`M:=max(a,b,c); m:=min(a,b,c);` calcule le maximum `M` et le minimum `m` de ces 3 valeurs,
`d:=a+b+c-M-m;` calcule le terme médian puisque $M + d + m = a + b + c$.
Remarque
$M - m < d$ est équivalent à $M < d + m$ et donc équivalent à $2M < a + b + c$.
On tape pour avoir une simulation de la probabilité que A gagne :

```
destrois(n):={
 local M,d,a,b,c,j,p;
 p:=0;
 pour j de 1 jusque n faire
   a:=rand(6)+1;
   b:=rand(6)+1;
   c:=rand(6)+1;
   M:=max(a,b,c);
   si 2*M<a+b+c alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  retourne(p/n);
  }:;
```

On peut aussi utiliser une séquence et la fonction `trier` qui trie par ordre croissant. On tape :

```
destroiss(n):={
 local M,m,d,S,j,p;
 p:=0;
 pour j de 1 jusque n faire
   S:=trier(rand(6)+1,rand(6)+1,rand(6)+1);
   m:=S[0];
   d:=S[1];
   M:=S[2];
   si M-m<d alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  retourne(p/n);
  }:;
```

On tape :
`destrois(10000)`
On obtient :
`2561/5000`
On tape :
`destrois(100000)`
On obtient :
`25591/50000`
Le jeu est donc favorable à A.

```
probadestrois():={
 local M,a,b,c,p;
 pour a de 1 jusque 6 faire
  pour b de 1 jusque 6 faire
   pour c de 1 jusque 6 faire
    M:=max(a,b,c);
    si 2M<a+b+c alors p:=p+1 fsi;
   fpour;
  fpour;
 fpour;
 retourne(p/6^3);
  }:;
```

Ou bien on tape :

```
probadestroiss():={
 local M,m,d,a,b,c,p,S;
 pour a de 1 jusque 6 faire
  pour b de 1 jusque 6 faire
   pour c de 1 jusque 6 faire
    S:=trier(a,b,c);
    m:=S[0];
    d:=S[1];
    M:=S[2];
    si M-m<d alors p:=p+1 fsi;
```

```
   fpour;
  fpour;
 fpour;
 retourne(p/6^3);
  }:;
```

On tape :
`probadestrois()`
ou `probadestroiss()`
On obtient :
`37/72 (≃ 0.513888888889)`
Calcul à la main
Il y a en tout $6^3 = 216$ possibilités.
Calculons le nombre de cas favorables pour que A gagne.

- Si $M - m = 5$ on doit avoir $M - m = 5 < d$ donc $d = 6$ les 3 possibilités sont (1,6,6) (6,1,6) et (6,6,1). Ce qui fait en tout 3 possibilités.
- Si $M - m = 4$ on doit avoir $M - m = 4 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (2,6,6),
  - si $d = 5$ (1,5,5) soit 3 possibilités ou (2,5,6) soit 3 !=6 possibilités.

  Ce qui fait en tout 3+3+6=12 possibilités.
- Si $M - m = 3$ on doit avoir $M - m = 3 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (3,6,6),
  - si $d = 5$ (2,5,5) 3 possibilités ou (3,5,6) soit 3 !=6 possibilités,
  - si $d = 4$ (1,4,4) 3 possibilités ou (2,4,5) 3 !=6 possibilités ou (3,4,6) 3 !=6 possibilités.

  Ce qui fait en tout 3*3+3*6=27 possibilités.
- Si $M - m = 2$ on doit avoir $M - m = 2 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$.
  - si $d = 6$ 3 possibilités (4,6,6),
  - si $d = 5$ (3,5,5) 3 possibilités ou (4,5,6) soit 6 possibilités,
  - si $d = 4$ (2,4,4) 3 possibilités ou (3,4,5) 6 possibilités ou (4,4,6) 3 possibilités,
  - si $d = 3$ (1,3,3) 3 possibilités ou (2,3,4) 6 possibilités ou (3,3,5) 3 possibilités.

  Ce qui fait en tout 4*3+5*6=36 possibilités.
- Si $M - m = 1$ on doit avoir $M - m = 1 < d$ donc $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$ ou $d = 2$.
  - Si $d = 6$ 3 possibilités (5,6,6),
  - si $d = 5$ (4,5,5) 3 possibilités ou (5,5,6) soit 3 possibilités,
  - si $d = 4$ (3,4,4) 3 possibilités ou (4,4,5) 3 possibilités,
  - si $d = 3$ (2,3,3) 3 possibilités ou (3,3,4) 3 possibilités,
  - si $d = 2$ (1,2,2) 3 possibilités ou (2,2,3) 3 possibilités.

  Ce qui fait en tout 3*9=27 possibilités.
- Si $M - m = 0$ on doit avoir $M - m = 0 < d$ donc $M = m = d$ et $d = 6$ ou $d = 5$ ou $d = 4$ ou $d = 3$ ou $d = 2$ ou $d = 1$. Ce qui fait en tout 6 possibilités.

On fait le total soit :

3+12+27+36+27+6=111 cas possibles. Donc la probabilité pour A de gagner est :
`111/216` on obtient `37/72`

9.2 La loterie "illico SOLITAIRE" et le tableur

La loterie "illico SOLITAIRE" consiste à acheter, pour 2 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 750 000 tickets. Pour ce bloc il y a :

```
100000 lots de     2 euros
 83000 lots de     4 euros
 20860 lots de     6 euros
  5400 lots de    12 euros
  8150 lots de    20 euros
   400 lots de   150 euros
    15 lots de  1000 euros
     2 lots de 15000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :
- le nombre de tickets gagnants
- la valeur en euros de tous les tickets gagnants
- la moyenne des gains
- le pourcentage de tickets gagnants

Combien avez-vous de chances de gagner ? (gagner signifiant avoir un lot supérieur à sa mise)
Ce jeu vous parait-il équitable ?

La solution
Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 100000 et dans $B0$ 2 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0 + A_1 + ...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans $C_1 := C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_7 on lit 217827, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans $D_1 := D0 + A_1 * B_1$
et on remplit vers le bas.
En D_7 on lit 989960, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
989960/750000.=1.31994666667 euros

Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(217827/750000)` soit 0.290436.
Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 100000 tickets gagnants de 2 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Donc le pourcentage de tickets gagnants un lot supérieur à sa mise est égale à :
`evalf(117827/750000)` soit 0.157102666667.
On peut donc dire que le parieur à 15.7102666667 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 2 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`750000*2- 989960` soit 510040 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.
X peut prendre les valeurs :
-2 avec une probabilité de $1-217827/750000 = 177391/250000$
0 avec une probabilité de $100000/750000 = 2/15$
2 avec une probabilité de $83000/750000 = 83/750$
4 avec une probabilité de $20860/750000 = 1043/37500$
10 avec une probabilité de $5400/750000 = 9/1250$
18 avec une probabilité de $8150/750000 = 163/15000$
148 avec une probabilité de $400/750000 = 1/1875$
998 avec une probabilité de $15/750000 = 1/50000$
14998 avec une probabilité de $2/750000 = 1/375000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :
$E(X) = -2*177391/250000+2*83/750+4*1043/37500+10*9/1250+18*163/15000+148*1/1875+998*1/50000+14998*1/375000 = -12751/18750 \simeq -0.680053333333$ Donc l'espérance de gain est une perte de 0.68 euros.
0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 2 euros et que la moyenne des gains est égale à 989960/750000 euros ($\simeq$ 1.31994666667) euros, soit une perte moyenne (989960/750000-2)=-12751/18750 euros soit environ de -0.68 euros.

9.3 La loterie "CAS-H illico" et le tableur

La loterie "CAS-H illico" consiste à acheter, pour 5 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 15 000 000 tickets. Pour ce bloc il y a :

```
1560000 tickets gagnants de      5 euros
1760000 tickets gagnants de     10 euros
 375000 tickets gagnants de     20 euros
 112500 tickets gagnants de     50 euros
 112500 tickets gagnants de    100 euros
   3750 tickets gagnants de    500 euros
   1800 tickets gagnants de   1000 euros
     40 tickets gagnants de   5000 euros
      5 tickets gagnants de  10000 euros
      3 tickets gagnants de 100000 euros
      3 tickets gagnants de 500000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les

données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :

— le nombre de tickets gagnants
— la valeur en euros de tous les tickets gagnants
— la moyenne des gains
— le pourcentage de tickets gagnants

Voici la publicité de la loterie "CAS-H illico" :
"Plus d'1 chance sur 4 de gagner !"
Qu'en pensez-vous ?
Ce jeu vous parait-il équitable ?

La solution

Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 1560000 et dans $B0$ 5 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0+A_1+...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans C_1 : $= C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_{10} on lit 3925601, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans D_1 : $= D0 + A_1 * B_1$
et on remplit vers le bas.
En D_{10} on lit 55500000, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
55500000/15000000=37/10=3.7 euros

Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(3925601/15000000)` soit 0.261706733333.
Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 1560000 tickets gagnants de 5 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Puisque 1-0.261706733333=0.738293266667, on peut donc dire que le parieur à 73.8293266667 chances sur 100 de perdre 5 euros
Puisque 1560000/15000000.=0.104, on peut donc dire que le parieur à 10.4 chances sur 100 de ne rien gagner et de ne rien perdre.
Le pourcentage de tickets gagnants une somme supérieure strictement à 5 euros est égale à :
`evalf((3925601-1560000)/15000000)` soit 0.157706733333.
On peut donc dire que le parieur à 15.7706733333 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 5 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`15000000*5-55500000` soit 19500000 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.

X peut prendre les valeurs :
-5 avec une probabilité de $1 - 3925601/15000000 = 11074399/15000000$
0 avec une probabilité de $1560000/15000000 = 13/125$
5 avec une probabilité de $1760000/15000000 = 44/375$
15 avec une probabilité de $375000/15000000 = 1/40$
45 avec une probabilité de $112500/15000000 = 3/400$
95 avec une probabilité de $112500/15000000 = 3/400$
495 avec une probabilité de $3750/15000000 = 1/4000$
995 avec une probabilité de $1800/15000000 = 3/25000$
4995 avec une probabilité de $40/15000000 = 1/375000$
9995 avec une probabilité de $5/15000000 = 1/3000000$ 99995 avec une probabilité de $3/15000000 = 1/5000000$
499995 avec une probabilité de $3/15000000 = 1/5000000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :
$E(X) = -5*11074399/15000000+5*44/375+15*1/40+45*3/400+95*3/400+495*1/4000+995*3/25000+4995*1/375000+9995*1/3000000+99995*1/5000000+499995*1/5000000 = -13/10$ Donc l'espérance de gain est une perte de 1.30 euros.
0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 5 euros et que la moyenne des gains est égale à 3.7 euros, soit une perte moyenne de -1.30 euros.

9.4 La loterie "500000 CARATS illico" et le tableur

La loterie "500000 CARATS illico" consiste à acheter, pour 5 euros, un ticket faisant partie d'un bloc de 8 016 000 tickets. Pour ce bloc il y a 2 055 464 tickets gagnants :

```
 704300 tickets gagnants de      5 euros
1030000 tickets gagnants de     10 euros
 200000 tickets gagnants de     15 euros
  40000 tickets gagnants de     50 euros
  80160 tickets gagnants de    100 euros
   1000 tickets gagnants de   1000 euros
      2 tickets gagnants de  10000 euros
      2 tickets gagnants de 500000 euros
```

Calculer à l'aide de `Xcas` :
La probabilité de gagner une somme supérieure ou égale à 500 euros Mettre les données dans le tableur de `Xcas` et faites apparaitre :

- le nombre de tickets gagnants
- la valeur en euros de tous les tickets gagnants
- la moyenne des gains
- le pourcentage de tickets gagnants

Voici la publicité de la loterie "CAS-H illico" :
"Une chance sur 4 de gagner !"
Qu'en pensez-vous ?
Ce jeu vous parait-il équitable ?

La solution

Dans la colonne A on met le nombre de tickets gagnants et dans la colonne B la valeur en euros de ces tickets.
On tape donc dans A_0 704300 et dans $B0$ 5 etc...
Le nombre de tickets gagnant est la somme : $A_0 + A_1 + ...A_{10}$. Pour cela on remplit la colonne C et on met :
dans C_0 : A_0
dans C_1 : $= C_0 + A_1$
et on remplit vers le bas.
En C_{10} on lit 2055464, ce qui représente le nombre de tickets gagnants.

Pour avoir la somme des lots de tous les tickets gagnants, on remplit la colonne D et on met :
dans D_0 : $A_0 * B_0$
dans D_1 : $= D0 + A_1 * B_1$
et on remplit vers le bas.
En D_7 on lit 28857500, ce qui représente la valeur en euros de tous les tickets gagnants.
La moyenne des gains est égale à :
28857500/8016000=37/10=3.59998752495 euros
Le pourcentage de tickets gagnants est égale à :
`evalf(2055464/8016000)` soit 0.256420159681.
Ce pourcentage est supérieur à 0.25 donc il y a plus d'une chance sur 4 d'avoir un ticket gagnant. MAIS, il y a 704300 tickets gagnants de 5 euros, soit des tickets qui représentent pour le parieur un gain nul !
Puisque 1-0.256420159681=0.743579840319, on peut donc dire que le parieur à 74.3579840319 chances sur 100 de perdre 5 euros
Puisque 704300/8016000.=0.0878617764471, on peut donc dire que le parieur à 8.78 chances sur 100 de ne rien gagner et de ne rien perdre.
Le pourcentage de tickets gagnants une somme supérieure strictement à 5 euros est égale à :
`evalf((2055464-704300)/8016000)` soit 0.168558383234.
On peut donc dire que le parieur à 16.8558383234 chances sur 100 de gagner plus que sa mise de 5 euros.
Celui qui organise cette loterie, si il vend tous les tickets du bloc, gagne :
`8016000*5-28857500` soit 40080000-28857500=11222500 euros !
Soit X la variable aléatoire égale au gain possible.
X peut prendre les valeurs :
-5 avec une probabilité de $1 - 2055464/8016000 = 745067/1002000$
0 avec une probabilité de $704300/8016000 = 7043/80160$
5 avec une probabilité de $1030000/8016000 = 515/4008$
10 avec une probabilité de $200000/8016000 = 25/1002$
45 avec une probabilité de $40000/8016000 = 5/1002$
95 avec une probabilité de $80160/8016000 = 1/100$
995 avec une probabilité de $1000/8016000 = 1/8016$
9995 avec une probabilité de $2/8016000 = 1/4008000$ 499995 avec une probabilité de $2/8016000 = 1/4008000$
Donc l'espérance de X est donc égale à :

$E(X) = -5*745067/1002000+5*515/4008+10*25/1002+45*5/1002+95*1/100+995*1/8016+9995*1/4008000+499995*1/4008000 = -22445/16032 \simeq -1.4$ Donc l'espérance de gain est une perte de 1.40 euros.
0n retrouve le résultat précédent puisque on mise 5 euros et que la moyenne des gains est égale à 3.59998752495 euros euros, soit une perte moyenne de -1.40 euros.

9.5 Pour comprendre l'écart type

9.5.1 Un exercice

Le comité des fêtes d'un village veut organiser une loterie en émettant 1000 billets à 2 euros.
A
Le comité des fêtes hésite entre 3 possibilités quand aux lots possibles :

1. il y a 10 billets qui gagnent 102 euros
2. il y a 43 billets qui gagnent 3,4,..32,33,33,34,...44 euros
3. il y a 100 billets qui gagnent 10.2 euros

Soient X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales au gain (en euros) du joueur qui achéte 1 billet pour chacune des 3 possibilités.
Pour chacune des 3 possibilités calculer la moyenne et l'écart type de cette variable aléatoire.
B
Après un sondage Le comité des fêtes décide d'opter pour la première solution :
sur 1000 billets à 2 euros il y a 10 billets qui gagnent 102 euros.

1. 2 amis décident d'acheter ensemble 2 billets et de se partager les gains car ils estiment qu'il auront plus de chances de gagner. Est-ce vrai ?
   Soit X_4 la variable aléatoire égales au gain (en euros) d'un des 2 amis. Calculer la moyenne et l'écart type de cette variable aléatoire X_4.
2. même question pour n ($n = 2..1000$) amis décident d'acheter ensemble n billets et de se partager les gains
3. Les comités des fêtes de 100 villages organisent le même type de loterie : 1000 billets de 2 euros avec 10 lots de 102 euros. Un habitant d'un village voisin décide de miser :
   — 20 euros
     A-t-il interêt à acheter les billets de loterie d'un même village ou des billets de loterie de villages tous différents ? Calculer pour chacun des cas la moyenne et l'écart type de ces gains.
   — 200 euros
     Même question. Faire un graphique qui compare les probabilité d'avoir k ($k = 0..10$) billets gagnants sur les 100 billets achetés.

9.5.2 La solution de A

- il y a 10 billets qui gagnent 102 euros X_1 peut prendre 2 valeurs :
  -2 avec la probabilité de 99/100 ou
  100 (102-2=100) avec la probabilité de 1/100 $simeq$ 0.01.
  Donc pour calculer la moyenne $m_1 = E(X_1)$, on tape :
  `m1:=-2*99/100+100*1/100`
  On obtient :
  `-49/50`$\simeq$`-0.98`
  Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_1)$, on tape :
  `sqrt((-2-m1)^2*99/100+(100-m1)^2*1/100)`
  On obtient :
  `7650*sqrt(11)/2500`$\simeq$`10.1488718585`
- il y a 43 billets qui gagnent 3,4,..32,33,33,34,...44 euros X_2 peut prendre 43 valeurs :
  -2 avec la probabilité de 957/1000 ou
  1,2..30 avec la probabilité de 1/1000
  31 (33-2=31) avec la probabilité de 2/1000
  32..42 avec la probabilité de 1/1000
  Donc pour calculer la moyenne $m_2 = E(X_2)$, on tape :
  `m2:=-2*957/1000+sum(n,n=1..30)*1/1000+31*2/1000+`
  `sum(n,n=32..42)*1/1000`
  On obtient :
  `-49/50`$\simeq$`-0.98`
  Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_2)$, on tape :
  `sqrt((-2-m2)^2*957/1000+sum((n-m2)^2,n=1..30)*1/1000+`
  `(31-m2)^2*2/1000+sum((n-m2)^2,n=32..42)*1/1000)`
  On obtient :
  `25*sqrt(73534)/1250`$\simeq$`5.42343064858`
- il y a 100 billets qui gagnent 10.2 euros X_3 peut prendre 2 valeurs :
  -2 avec la probabilité de 9/10 ou
  8.2 (10.2-2=8.2) avec la probabilité de 1/10 Donc pour calculer la moyenne $m_3 = E(X_3)$, on tape :
  `m3:=-2*9/10+8.2*1/10`
  On obtient :
  `-0.98`
  Donc pour calculer l'écart type $\sigma(X_3)$, on tape :
  `sqrt((-2-m3)^2*9/10+(8.2-m3)^2*1/10)`
  On obtient :
  `3.06`

On remarque que dans les 3 cas les moyennes sont les mêmes mais par contre les écarts types sont différents : ils sont de plus en plus petits au fur et à mesure que l'on a plus de chances d'avoir un billet gagnant en effet à moyenne égale si on a plus de chances d'avoir un billet gagnant c'est que le gain est plus petit et donc l'écart des gains à la moyenne est plus petit car l'écart type résume les écarts entre chaque résultat possible et la valeur moyenne.
Dans tous les 3 cas la vente de tous les billets rapportera au comité des fêtes la somme de 980 euros. Mais que faut-il préférer peu de gros lots ou beaucoup de

petits lots ? À vous de choisir ! ! ! !

9.5.3 La solution de B

Sur 1000 billets à 2 euros il y a 10 billets qui gagnent 102 euros.

1. 2 amis décident d'acheter ensemble 2 billets et de se partager les gains.
   Soit X_4 la variable aléatoireégale au gain obtenu par l'un d'eux, X_4 peut prendre les valeurs :

   — -2 avec la probabilté :
     `comb(990,2)/comb(1000,2)`$\simeq$ 0.98009009009
   — (102-4)/2=49 avec la probabilté :
     `comb(990,1)*comb(10,1)/comb(1000,2)`$\simeq$0.0198198198198
   — 100 avec la probabilté :
     `comb(10,2)/comb(1000,2)`$\simeq$ 9.00900900901e-05

   Donc pour $n = 2$
   En misant 2 euros on a une chance de gagner en se mettant à 2, avec une probabilité de 0.0199099099099 (au lieu de 0.01) mais le gain risque dêtre moins important ! Pour calculer la moyenne $m_4 = E(X_4)$, on tape :
   `m4:=(-2*comb(990,2)+49*comb(990,1)*comb(10,1)+`
   `100*comb(10,2))/comb(1000,2)`
   On obtient encore la même moyenne :
   `-49/50`$\simeq$ -0.98
   Pour calculer l'écart type $\sigma(X_4)$, on tape :
   `sqrt(((-2-m4)^2*comb(990,2)+(49-m4)^2*comb(990,1)*`
   `comb(10,1)+(100-m4)^2*comb(10,2))/comb(1000,2))`
   On obtient :
   `850*sqrt(609279)/92500`$\simeq$ 7.17274345342.

2. n amis décident d'acheter ensemble n billets et de se partager les gains.
   Ce qu'il faut comprendre c'est que si n ($n \leq 1000$) parieurs décident de partager le gain provenant des n billets de cette loterie, l'espérance de gain d'un joueur sera toujours de -0.98 (c'est à dire une perte de -0.98 euros) mais l'écart type sera de plus en plus petit au fur et à mesure que n augmente : le cas limite étant $n = 1000$ avec un gain sûr de -0.98 euros et donc un écart type nul. **La solution de B pour $n = 2..1000$ avec un programme**
   On doit regarder 3 cas différents :
   — $1 <= n <= 10$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $0, 1..n$
   — $11 <= n <= 990$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $0, 1..10$
   — $991 <= n <= 1000$
     Dans ce cas le nombre p de billets gagnants peut être $n - 990..10$

   On tape pour calculer dans chacun de ces cas la moyenne et l'écart type de la variable aléatoire égale au gain d'un parieur :

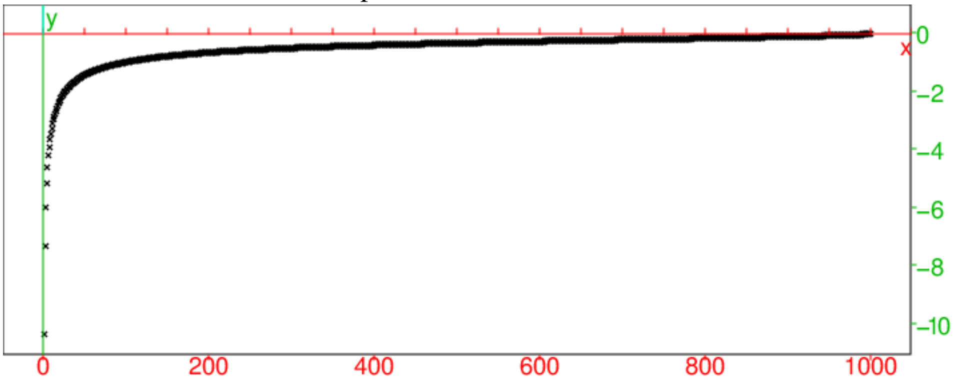
```
msigma(n):={
local p,m,sigma2;
m:=0;
sigma2:=0;
si n<=10 alors
  pour p de 0 jusque n faire
    m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
  fpour;
  pour p de 0 jusque n faire
    sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                    comb(10,p)/comb(1000,n);
  fpour;
sinon
  si n<=990 alors
    pour p de 0 jusque 10 faire
      m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
    pour p de 0 jusque 10 faire
      sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                    comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
  sinon
    pour p de n-990 jusque 10 faire
      m:=m+(102*p-2*n)/n*comb(990,n-p)*comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
    pour p de n-990 jusque 10 faire
      sigma2:=sigma2+((102*p-2*n)/n-m)^2*comb(990,n-p)*
                    comb(10,p)/comb(1000,n);
    fpour;
  fsi;
fsi;
retourne [m,sqrt(sigma2)];
}:;
```

Pour n fixé, on appelle mn la moyenne et sn l'écrat type et on trace les points d'abscisse n et d'ordonnée sn/mn (c'est le coefficient de dispersion) :

```
gmsigma():={
  local L,n,msn,mn,sn;
  L:=NULL;
   pour n de 1 jusque 1000 faire
    msn:=msigma(n);mn:=evalf(msn[0]);sn:=evalf(msn[1]);
    L:=L,point(n,sn/mn,affichage=1);
   fpour;
 retourne L;
}:;
```

On tape :

`gmsigma()`
On obtient le coefficient de dispersion en fonction de n :



3. Les comités des fêtes de 100 villages organisent le même type de loterie : 1000 billets de 2 euros avec 10 lots de 102 euros.
   — Un habitant d'un village voisin décide de miser 20 euros
   Si il achète 10 billets de la loterie du même village :
   Soit X_5 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
   X_5 a 11 valeurs possibles qui sont : $102 * k - 20$ pour $k = 0..10$
   Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
   `comb(10,k)*comb(990,10-k)/comb(1000,10)` pour $k = 0..10$
   On tape :
   `V5:=[(102*k-20)$(k=0..10)]`
   On obtient :
   `[-20,82,184,286,388,490,592,694,796,898,1000]`
   On tape :
   `P5:=[(comb(10,k)*comb(990,10-k)/comb(1000,10))$(k=0..10)]`
   On obtient pour `evalf(P5,4)` :
   `[0.904,0.09215,0.0038,8.248e-05,1.027e-06,7.505e-09,3.172e-11,7.345e-14,8.363e-17,3.758e-20,3.796e-24]`
   La moyenne m_5 vaut :
   `moyenne(V5,P5)` soit `-49/5`
   L'écart type σ_5 vaut :
   `ecart_type(V5,P5)` soit `2805*sqrt(111)/925`≃ 31.948658137
   Si il achète 10 billets de la loterie de 10 villages différents :
   Chaque billet à une probabilité de 1/100 dêtre gagnant car les 10 tirages sont indépendants : il s'agit alors de la loi binomiale $B(10, 1/100)$. Soit X_6 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
   X_6 a 11 valeurs possibles : les mêmes que X_5 et donc :
   `V6:=V5`
   Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
   `binomial(10,k,1/100)=comb(10,k)*(1/100)^k*(99/100)^(10-k)`
   On tape pour vair la probabilité des 11 premières valeurs :
   `P6:=[binomial(10,k,1/100)$(k=0..10)]`
   On obtient pour `evalf(P5,4)` :
   `[0.9044,0.09135,0.004152,0.0001118,1.977e-06,2.396e-08,2.017e-10,1.164e-12,4.41e-15,9.9e-18,1e-20]` La moyenne

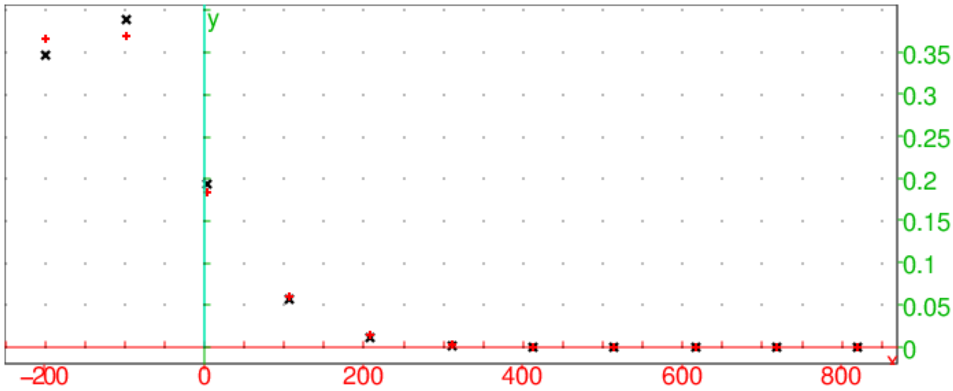
m_6 vaut :
`moyenne(V6,P6)` soit `-49/5`
L'écart type σ_6 vaut :
`ecart_type(V6,P6)` soit `765*sqrt(110)/250`≃ 32.093550754

— Un habitant d'un village voisin décide de miser 200 euros
Il achète 100 billets de la loterie du même village :
Soit X_7 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
X_7 a 11 valeurs possibles qui sont : $102 * k - 200$ pour $k = 0..10$
Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
`comb(10,k)*comb(990,100-k)/comb(1000,100)` pour $k =$ $0..10$
On tape :
`V7:=[(102*k-200)$(k=0..10)]`
On obtient :
`[-200,-98,4,106,208,310,412,514,616,718,820]`
On tape :
`P7:=[(comb(10,k)*comb(990,100-k)/comb(1000,100))$(k=0..10)]`
On obtient pour `evalf(P7,4)` :
`[0.3469,0.3894,0.1945,0.05691,0.01081,0.001391,0.0001229,7.359`
La moyenne m_7 vaut :
`moyenne(V7,P7)` soit `-98`
L'écart type σ_7 vaut :
`ecart_type(V7,P7)` soit `102*sqrt(1221)/37`≃ 96.3288287235
Si il achète 100 billets de la loterie de 100 villages différents :
Chaque billet à une probabilité de 1/100 dêtre gagnant car les 100 tirages sont indépendants : il s'agit alors de la loi binomiale $B(100, 1/100)$.
Soit X_8 la variable aléatoire égale au gain du parieur.
X_8 a 101 valeurs possibles car chaque billet peut gagner (bien que peu probable !) :
`V8:=[(102*k-200)$(k=0..101)]:;`
Chacune de ces valeurs a une probabilité ègale à :
`binomial(100,k,1/100)` On tape :
`P8:=[binomial(100,k,1/100)$(k=0..101)]:;`
On obtient pour les 14 premières valeurs approchées de `evalf(P8,4)` :
`[0.366,0.3697,0.1849,0.061,0.01494,0.002898,0.0004635,6.286e-0`
La moyenne m_8 vaut :
`moyenne(V8,P8)` soit `-98`
L'écart type σ_8 vaut :
`ecart_type(V8,P8)` soit `765*sqrt(11)/25`≃ 101.488718585

On compare les probabilités d'avoir $k = 0..10$ billets gagnants.
On tape :

```
[point(V7[k],P7[k],affichage=epaisseur_point_2)$(k=0..10),
point(V8[k],P8[k],affichage=1+point_plus+epaisseur_point_2)
$(k=0..10)]
```

On obtient en rouge la loi binomiale :


y
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−200
0
200
400
600
800
x

Chapitre 10

Trigonométrie-Angles-Polygones

10.1 Longueur d'un côté d'un triangle rectangle

10.1.1 Exercice 1

On peut montrer que si p est un nombre premier qui a 1 comme reste lorsqu'on le divise par 4 alors il existe deux entiers a et b tels que $p = a^2 + b^2$.
Application $p = 61$, $p = 153$.
Factoriser $n = 388$ et décomposer n en une somme de 2 carrés.
Construire le triangle ABC tel que $BC = a = \sqrt{388}$, , $AC = b = \sqrt{61}$, $AB = c = \sqrt{153}$.
Déterminer l'aire de ABC.
Inventer un exercice semblable à celui la.
La solution On vérifie que 61 et 153 sont premiers et ont 1 comme reste lorsqu'on les divise par 4 :

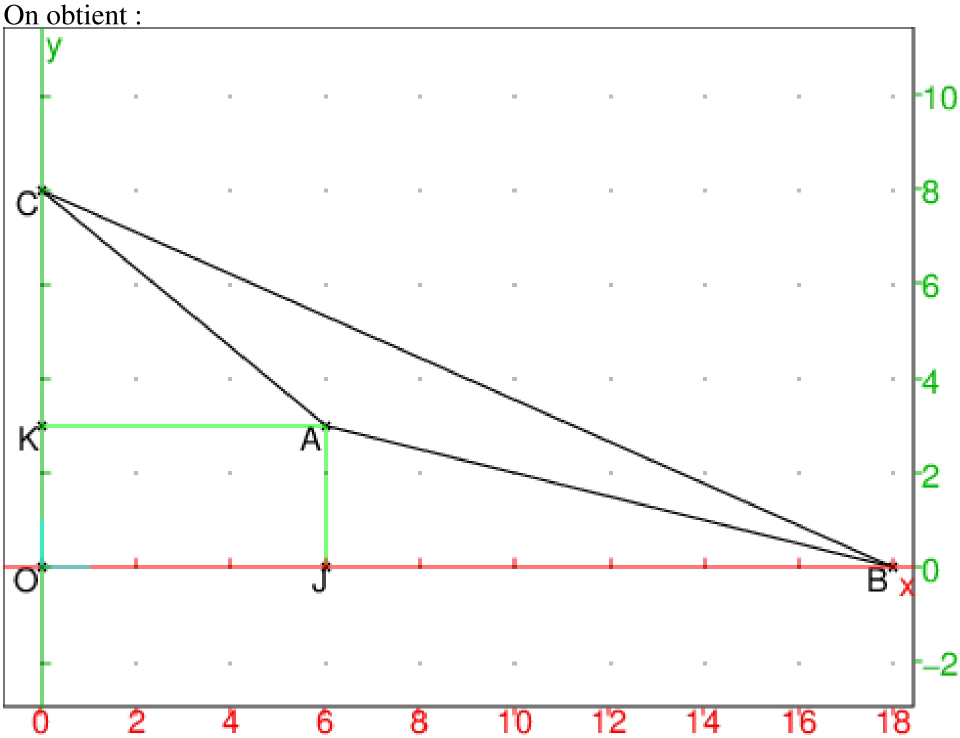
- 61 n'est pas divisible par 2,3,5,7 et comme $11^2 = 121 > 61$ on en déduit que 61 est un nombre premier.
  0n a : 61=4*15+1
- 153 n'est pas divisible par 2,3,5,7,11 et comme $13^2 = 169 > 153$ on en déduit que 153 est un nombre premier.
  0n a : 153=4*38+1

On trouve par tatonnement que :
$61 = 25 + 36 = 5^2 + 6^2$
$153 = 9 + 144 = 3^2 + 12^2$
Ou bien on utilise la fonction `pa2b2` de `Xcas` qui fait cette décomposition. `pa2b2(p)` renvoie la liste $[a, b]$ tel que $p = a^2+b^2$ On tape `pa2b2(61)` et on obtient `[6,5]`
On tape `pa2b2(153)` et on obtient `[12,3]`
On factorise 388, on tape :
`factoriser_entier(388)` et on obtient `2^2*97`
On vérifie que 97 est premier et a 1 comme reste lorsqu'on le divise par 4 : 97 n'est pas divisible par 2,3,5,7 et comme $11^2 = 121 > 97$ on en déduit que 97 est un nombre premier.
On a : 97=4*24+1.
Donc 97 se décompose en une somme de 2 carrés.
On trouve par tatonnement que :

$97 = 16 + 81 = 4^2 + 9^2$
Ou bien on tape `pa2b2(97)` et on obtient `[9,4]`
Donc $388 = 4 * (4^2 + 9^2) = 8^2 + 18^2$
Pour construire le triangle ABC, on sait d'après le théorème de Pythagore et les résultats précédent que : $BC = a = \sqrt{388}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 8 et 18,
$AC = b = \sqrt{61}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 5 et 6,
$AB = c = \sqrt{153}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 3 et 12.
On remarque que 8=5+3 et que 18=6+12, d'où la construction dans un niveau de géométrie $2d$:

```
B:=point(18);
C:=point(0,8);
A:=point(6,3);
triangle (A,B,C);
segment(A,6,affichage=2);
segment(A,point(0,3),affichage=2);
```

On obtient :



On tape pour vérifier :
`longueur2(B,C),longueur2(A,C),longueur2(A,B)`
On obtient :
`388,61,153`
L'aire du triangle ABC se calcule facilement par différence :
aire de OBC est égale à 18*8/2=72.
aire de KAC est égale à 5*6/2=15.
aire de $OBAK$ est égale à 3*(18+6)/2=3*12=36.

Donc l'aire du triangle ABC est égale à 72-15-36=21.
On vérifie avec `Xcaqs`, on tape :
`aire(triangle(A,B,C))`
On obtient :
`21`
Pour faire un exercice de même style, il faut choisir d'avoir la même configuration pour la construction du triangle ABC.
Par exemple :
$OB = 2 + 8 = 10$, $OC = 1 + 5 = 6$ et A le point de coordonnées (2,1).
On a alors :
$BC^2 = 100 + 36 = 136$
$AC^2 = 4 + 25 = 29$
$AB^2 = 1 + 64 = 65$
et l'aire du triangle ABC est égale à 19.

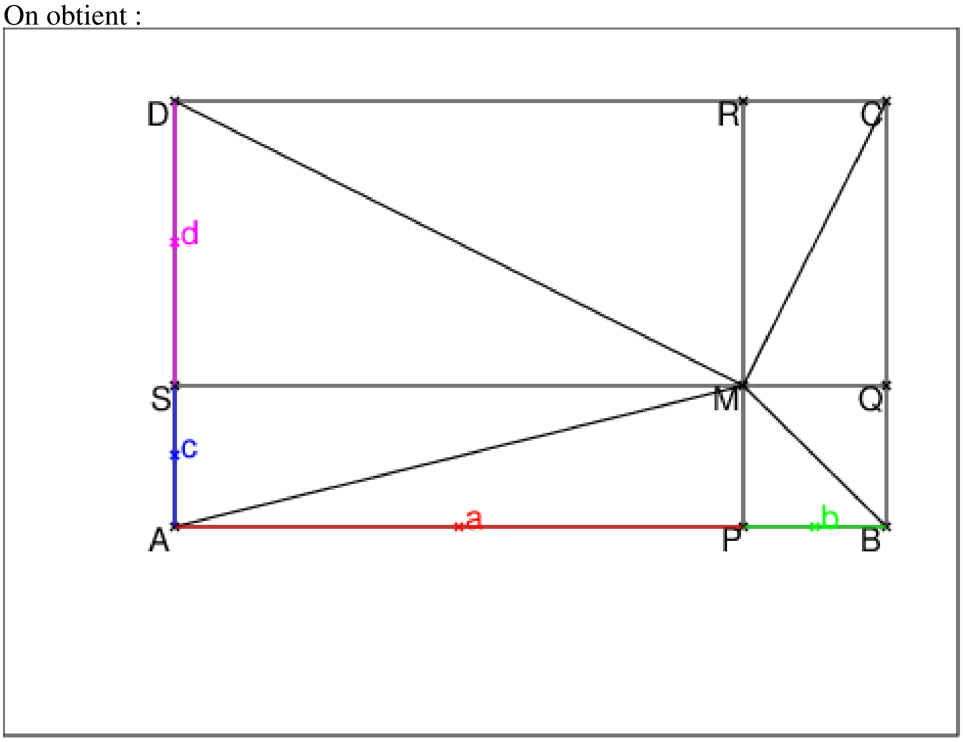
10.1.2 Exercice 2

Soient dans le plan, un rectangle $ABCD$ et un point M à l'intérieur du rectangle.
Les parallèles aux côtés du rectangle passant par M coupent :
AB en P, BC en Q, CD en R et AD en S.
On pose $a = AP$, $b = PB$, $c = AS$ et $d = SD$.
Calculer MA^2, MB^2, MC^2. MD^2 en fonction de a, b, c, d
Calculer MC^2 en fonction de MA^2, MB^2, MD^2.
Application numérique :
On donne $MA = 9$, $MB = 7$ et $MD = 6$
Calculer MC
On veut déterminer les rectangles $ABCD$ ayant cette propriété à savoir $MA = 9$, $MB = 7$ $MC = 2$ et $MD = 6$ pour un point M du plan ABC.
Pour cela on note :
$x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ et $t = d^2$.
Déterminer le système linéaire que vérifie x, y, z, t
Résoudre ce système linéaire avec `Xcas`.
Construire un rectangle $ABCD$ ayant cette propriété.
La solution
On ouvre un niveau de géométrie 2-d.
On tape :

```
A:=point(0);
B:=point(5);
C:=point(5+i*3);
D:=point(i*3);
polygone(A,B,C,D);
M:=point(4+i);
P:=point(4);
R:=point(4+3*i);
S:=point(i);
Q;=point(5+i);
```

```
segment(A,M);
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
segment(P,R);
segment(S,Q);
segment(A,P,affichage=1),
point(2,legend="a",affichage=1)
segment(B,P,affichage=2),
point(4.5,legend="b",affichage=2)
segment(A,S,affichage=4),
point(i/2,legend="c",affichage=4)
segment(D,S,affichage=5),
point(i*2,legend="d",affichage=5)
```

On obtient :



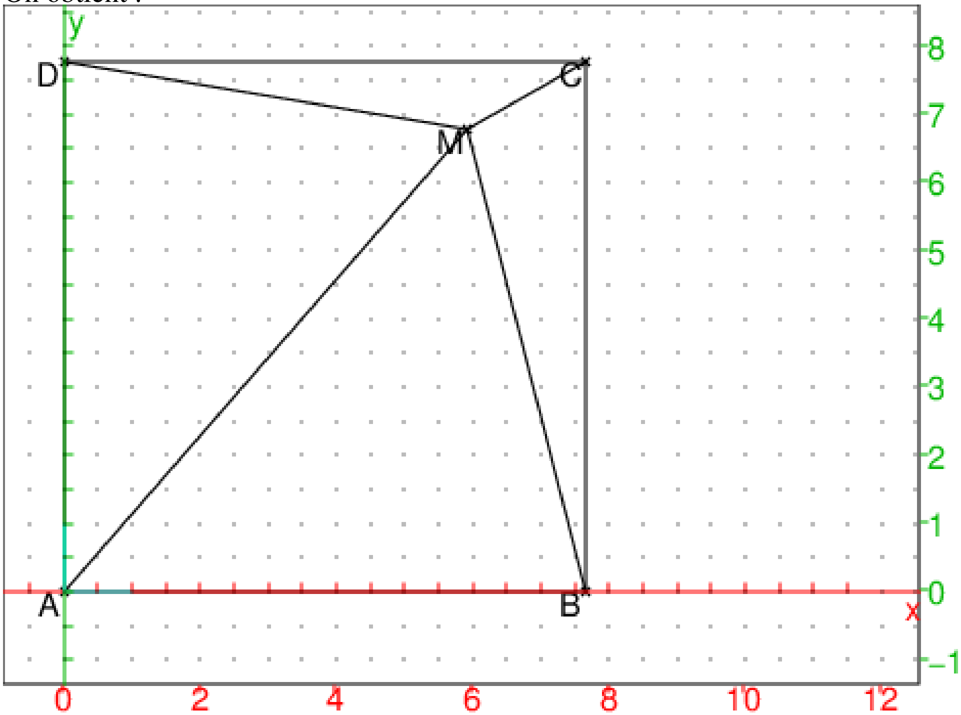
On a d'après Pythagore :
$AM^2 = a^2 + c^2$
$BM^2 = b^2 + c^2$
$CM^2 = b^2 + d^2$
$DM^2 = a^2 + d^2$
Donc :
$AM^2 + CM^= a^2 + c^2 + b^2 + d^2$
$BM^2 + DM^2 = b^2 + c^2 + a^2 + d^2$
Donc $AM^2 + CM^= BM^2 + DM^2$
On en déduit :
$CM^2 = BM^2 + DM^2 - AM^2$ On remarquera que cette relation est enore valable si M se trouve à l'extérieur du rectangle $ABCD$.

Application numérique :
$CM^2 = 49 + 36 - 81 = 4$ Donc $CM = 2$

Soit maintenant un rectangle $ABCD$ et un point M du plan ABC.
Les parallèles aux côtés du rectangle passant par M coupent :
AB en P, BC en Q, CD en R et AD en S.
On pose $a = AP$, $b = PB$, $c = AS$ et $d = SD$.
On a d'après ce qui précède :
$AM^2 = a^2 + c^2 = 81$
$BM^2 = b^2 + c^2 = 49$
$CM^2 = b^2 + d^2 = 4$
$DM^2 = a^2 + d^2 = 36$
c'est à dire si $x = a^2, y = b^2, z = c^2, t = d^2$:
x+z=81
y+z=49
y+t=4
x+t=36
Avec `Xcas`, on tape :
`resoudre_systeme_lineaire([x+z=81,y+z=49,y+t=4,x+t=36],[x,y,z,t])`
On obtient :
`[-t+36,-t+4,t+45,t]`
Si on choisit $d^2 = t = 1$ i.e, $d = 1$, on en déduit $a^2 = 35, b^2 = 3, c^2 = 46$
Donc le rectangle $ABCD$ a pour côté :
$AB = a + b = \sqrt{35} + \sqrt{3}$ et
$AD = \sqrt{46} + 1$
Le point M a pour coordonnées $(\sqrt{35}, \sqrt{46})$.
On tape

```
M:=point(sqrt(35),sqrt(46));
A:=point(0);
B:=point((sqrt(35)+sqrt(3));
C:=point((sqrt(35)+sqrt(3)+i+i*sqrt(46)));
D:=point(i+i*sqrt(46));
polygone(A,B,C,D);
segment(A,M);
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
```

On obtient :



On tape :

```
longueur(M,A)
```

On obtient :

```
9
```

On tape :

```
longueur(M,B)
```

On obtient :

```
7
```

On tape :

```
longueur(M,D)
```

On obtient :

```
6
```

On tape :

```
longueur(M,C)
```

On obtient :

```
2
```

Ou bien on utilise t comme paramètre (t varie entre 0 et 4 pour que $y = b^2$ soit positif). On a $a^2 = -36 - t, b^2 = 4 - t, c^2 = 45 + t, d^2 = t$ donc on tape

```
supposons(t=[1,0,4,0.1]);
M:=point(sqrt(36-t),sqrt(45+t));
A:=point(0);
B:=point(sqrt(36-t)+sqrt(4-t));
C:=point(sqrt(36-t)+sqrt(4-t)+i*sqrt(t)+i*sqrt(45+t));
D:=point(i*sqrt(t)+i*sqrt(45+t));
polygone(A,B,C,D);
segment(A,M);
```

```
segment(B,M);
segment(C,M);
segment(D,M);
longueur(M,A);
longueur(M,B);
longueur(M,C);
longueur(M,D);
plotparam(affixe(M),t=0..4);
```

M a comme coordonnées a, b.
On a $a^2 + c^2 = 81$ et $a^2 = (36 - t), c^2 = (45 + t) = -a^2 + 81$.
donc M se trouve sur l'arc M_0M_1 du cercle de centre A et de rayon 9. avec $M0$ de coordonées $(6, 3\sqrt{5})$ et $M1$ de coordonnées $(4\sqrt{2}, 7)$.

Chapitre 11

Géométrie dans l'espace

11.1 Le tétraèdre régulier

11.1.1 Travail préparatoire

Faire découper par chaque élève dans du papier 4 triangles équilatéraux égaux de côté $a = 3cm$.
Réunir 3 de ces triangles (qu'on nomme $S1AB$, $S2BC$ et $S3CA$) de façon à réunir $S1, S2, S3$ en S et d'obtenir une pointe de sommet S et de base ABC (les 3 triangles seront reunis selon SA, SB, SC) :
on obtient un tétraèdre dont la face est ABC manquante. Cette face manquante peut être comblée par le 4-ième triangle équilatéral ABC. Fixer ce 4-ième triangle aux 3 autres et projeter S en H sur cette face ABC. Les questions :

1. Où se trouvent H ?
2. Calculer AH,BH,CH,SH.
3. Calculer l'angle que font les faces SAB, SBC, SCA avec la face ABC.
4. Calculer le volume de ce tétraèdre régulier en fonction de $a = AB$.
5. Ouvrir maintenant la pointe coupant SA, SB, SC pour obtenir une figure plane (S va redevenir 3 points $S1, S2, S3$). Qu'obtient-on ?
6. Où se trouvent alors les points A, B, C ?
7. Que décrivent les points $S1, S2, S3$ lorsque l'on replie le triangle $S1S2S3$ pour former le tétraèdre $SABC$.

Si $B1$ est la projection de $S3$ sur AC, on a :
$S3B1 = a\sqrt{3}/2$, $B1H = a\sqrt{3}/6$ et
$SH^2 = SB1^2 - B1H^2 = 3a^2/4 - 3a^2/36 = 2a^2/3$ L'angle b que font les faces entre elles a donc pour tangente :
$\tan(b) = SH/B1H = a\sqrt{2}/\sqrt{3}/(a\sqrt{3}/6) = 6\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2}$

11.1.2 Vérification et calculs avec `Xcas`

On ouvre un niveau de géométrie 3d. On choisit de construire un tétraèdre de côté 3.

1. On tape :

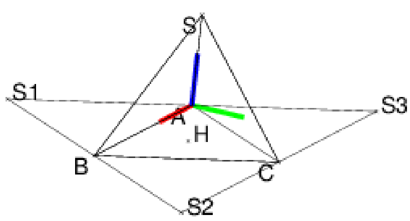
```
A:=point(0,0,0);
B:=point(3,0,0);
C:=point(3/2,sqrt(3)*3/2,0);
T:=tetraedre(A,B,C):;T;
S:=sommets(T)[3];
H:=projection(plan(A,B,C),S);
normal(coordonnees(H))
```

On obtient pour H : `[3/2,(sqrt(3))/2,0]`

2. On tape :
   `normal(longueur(A,H),longueur(B,H),longueur(C,H))`
   On obtient : `sqrt(3),sqrt(3),sqrt(3)`
   On tape :
   `normal(longueur(S,H))`
   On obtient : `sqrt(6)`
3. On tape :
   `angle(plan(S,A,B),plan(A,B,C))`
   On obtient : `acos(1/3)`
4. On tape pour avoir le volume du tétraèdre T
   `normal(1/3*longueur(S,H)*aire(triangle(A,B,C)))`
   On obtient : `9*sqrt(3)/4`
5. On tape :

```
A:=point(0,0,0);
B:=point(3,0,0);
C:=point(3/2,sqrt(3)*3/2,0);
T:=tetraedre(A,B,C):;T;
S:=sommets(T)[3];
S1:=rotation(droite(A,B),pi-acos(1/3),S);
S2:=rotation(droite(B,C),pi-acos(1/3),S);
S3:=rotation(droite(C,A),pi-acos(1/3),S);
triangle(S1,S2,S3);
```

On obtient :



6. On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S3))-coordonnees(A))`
   On obtient : `[0,0,0]`
   ou on tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S3)))==normal(coordonnees(A))`
   On obtient : `1` c'est à dire `vrai`
   On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S1,S2))-coordonnees(B))`
   On obtient : `[0,0,0]`
   On tape :
   `normal(coordonnees(milieu(S2,S3))-coordonnees(C))`
   On obtient : `[0,0,0]`

Remarque
Si on veut avoir les résultats en fonction de a il faut ajouter le paramètre a avec `Edit` du niveau de géométrie 3d puis ajouter paramètre en mettant par exemple que a varie de 0 à 5 et en mettant $a = 3$ ce qui donne comme niveau 1 :
`assume(a=[3,0,5,0.1])` puis on modifie fes définitions :
`B:=point(a,0,0);`
`C:=point(a/2,a*sqrt(3)/2,0);`
les longueurs sont alors multipliées pas $a/3$ et le volume par $a^3/27$.

11.1.3 Faire une animation avec `Xcas`

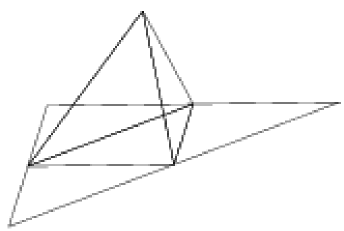
Faire une animation qui montre comment en pliant un triangle équilatéral, on obtient un tétraédre régulier. On pose $a = 6$ et on a $\tan(b) = 2\sqrt{2}$ donc $b = \text{atan}(2\sqrt{2}) \simeq 1.23$ $S1$ subit une rotation d'un angle allant de 0 à $\pi - b \simeq 1.91$.
On note MNP le triangle $S1S2S3$ et on note $S1$ le transformé de M par la rotation d'axe AB etc ...
Faire attention à l'orientation de l'axe de la rotation ! ! !
On tape :

```
tetreganim(t):={
local S1,S2,S3,A,B,C,c,K,M,N,P;
M:=point(0,0,0):;
N:=point(6,0,0):;
P:=point(3,3*sqrt(3),0):;
triangle(M,N,P);
A:=milieu(M,P);
B:=milieu(M,N);
C:=milieu(N,P);
S1:=rotation(droite(B,A),t,M);
S2:=rotation(droite(C,B),t,N);
S3:=rotation(droite(A,C),t,P);
retourne [affichage(triangle(S1,A,B),1+rempli),
          affichage(triangle(S2,C,B),2+rempli),
          affichage(triangle(S3,A,C),4+rempli)];
}:;
```

Puis, on tape dans des lignes de commandes (WX-=-3,WX+=7 et les autre-5 et +5) : `L1:=seq([tetreganim(t)],t=0..1.91,0.1):;`
`L2:=seq([tetreganim(t)],t=1.91..0,-0.1):;`
`animation(L1,L2)`
On obtient :

11.2 Le tétraèdre non régulier ayant 4 faces égales

On veut plier une feuille triangulaire pour en faire un tétraèdre.

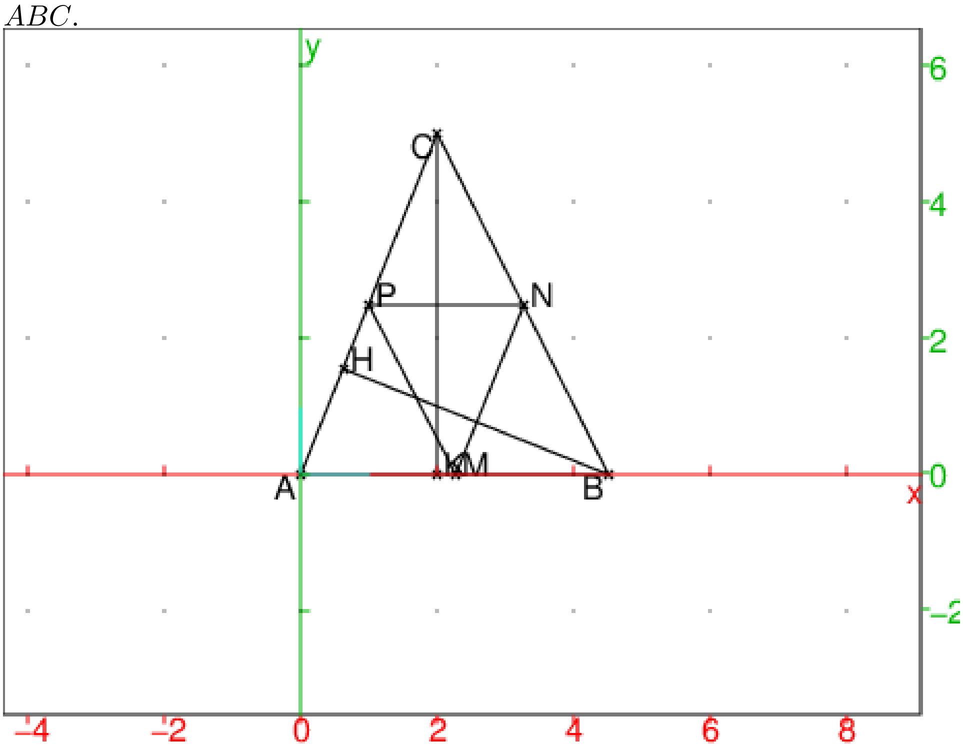


Cela est-il toujours possible ?

11.2.1 Travail préparatoire

Soit un triangle ABC. On veut le plier pour en faire un tétraèdre $MNPQ$. On veut plier le triangle ABC pour amener A, B, C en le sommet Q.
Si cela est possible on aura :

$MA = MB = MQ$ si M est le point de pliure sur AB,
$NB = NC = NQ$ si N est le point de pliure sur BC,
$PA = PC = PQ$ si P est le point de pliure sur AC.
Donc le triangle MNP est le triangle qui joint les milieux des côtés du triangle ABC.



Peut-on toujours amener A, B, C en le sommet Q ?
Regardons tout d'abord en géométrie plane les propriétés de la figure formée par ABC et MNP.
Soient J le symétrique de B par rapport à MN et K le symétrique de C par rapport à PN (cela revient à réaliser les plis MN et PN).
Montrer que

— le triangle MNP a ses côtés parallèles aux côtés de ABC,
— $MN = AC/2$, $NP = AB/2$ et $MP = BC/2$,
— J est le pied de la hauteur de ABC issue de B
— K est le pied de la hauteur de ABC issue de C

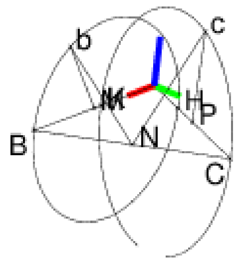
Regardons maintenant en géométrie dans l'espace où se déplacent les points $S2$ et $S3$ ($S2$ (resp $S3$) est le nom de B (resp C)) quand on fait le pliage.

— Montrer que $S2$ et $S3$ sont sur la sphère de diamètre BC (i.e. centre N et rayon $BC/2$),
— Montrer que $S2$ est aussi sur une 2ième sphère. Laquelle ?
— Montrer que $S3$ est aussi sur une 3ième sphère. Laquelle ?
— Lorsque l'on plie selon MN, on fait subir au point $S2$ une rotation. Quel est l'axe de cette rotation ?
— En déduire que $S2$ décrit un cercle de centre le milieu de BJ.
Ce cercle est l'intersection de 2 sphères lesquelles ? Montrer que le plan de ce cercle est le plan perpendiculaire en J à AC.
— Lorsque l'on plie selon PN, on fait subir au point $S3$ une rotation. Quel

est l'axe de cette rotation ?

- En déduire que $S2$ décrit un cercle de centre le milieu de CK.
  Ce cercle est l'intersection de 2 sphères lesquelles ? Montrer que le plan de ce cercle est le plan perpendiculaire en K à AB.
- le problème sera possible si les cercles que décrivent $S2$ et $S3$ se coupent, c'est à dire si les plans de ces 2 cercles se coupent en dehors de la sphère de diamètre BC. Qu'est-ce que cela signifie pour l'orthocentre H du triangle ABC ?
- Qu'est-ce que cela signifie pour les angles du triangle ABC ?

Lorsqu'on plie la feuille selon MN, que décrit le point B ? Lorsqu'on plie la feuille selon NP, que décrit le point C ? C décrit un cercle de diamètre CK situé dans le plan perpendiculaire à NP.
Ce cercle est la base d'un cône d'axe NP et de demi-angle au sommet l'angle $\widehat{CNP} = \widehat{CBA}$.
B décrit un cercle de diamètre BH situé dans le plan perpendiculaire à NM.
Ce cercle est la base d'un cône d'axe NM et de demi-angle au sommet l'angle $\widehat{BNM} = \widehat{BCA}$.
Ces cercles se coupent-ils ?
On a si $BC = a$ et $AC = b$: $HB = a * \sin(C)$ et $CK = b\sin(A)$
Si $\widehat{A} + \widehat{C} > \widehat{B}$ les 2 cercles se coupent.
Comme $\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} = \pi$ on en déduit que l'on doit avoir $\widehat{B} < \pi/2$
de même on montre que l'on doit avoir $\widehat{C} < \pi/2$ et $\widehat{A} < \pi/2$. Donc le problème est possible si le triangle de départ n'a que des angles aigus.



11.2.2 Les relations dans un triangle ABC

Avant de faire une animation, on va rappeler les relations qui relient les hauteurs, le rayon R du cercle circonscrit et l'aire S aux 3 cotés a, b, c du triangle

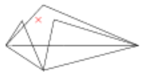
ABC.
Rappel
Soit un triangle ABC.
On note h_a (resp h_b, h_c) la hauteur issue de A (resp B, C),
H l'orthocentre de ABC
A_1 le pied de la hauteur issue de A
A_2 le milieu de AA_1
M (res N, P) les milieux de AB (resp BC, AC)
R le rayon du cercle circonscrit
O le centre du cercle circonscrit et
S l'aire du triangle ABC.
Si a (resp b, c) représente la longueur du côté BC (resp AC, AB), on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ on a alors :
O est l'intersection des médiatrices de AB et BC,
H est le transformé de O par l'homothétie de centre G et de rapport -2.
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$R = \dfrac{abc}{4S}$ $AA_1 = h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$
$AH = 2ON = 2\sqrt{R^2 - a^2/4} = \sqrt{4R^2 - a^2}$
$A_2H = AH - \dfrac{h_a}{2} = \sqrt{4R^2 - a^2} - \dfrac{S}{a}$
Si on plie le triangle selon MP, MN et NNP afin de reunir les points A, B, C en S de façon à former le tétraèdre $SMNP$, alors A se projette en H orthocentre de ABC.
Si a_1 est l'angle de la face AMP avec la face MNP on a :
$\cos(a_1) = 2HA_2/AA_1 = a{*}HA_2/S = \dfrac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{S} - 1 = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2c^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
De même si b_1 (resp $c1$) est l'angle de la face BNP (resp CMP) avec la face MNP on a :
$\cos(b_1) = \dfrac{b^2\sqrt{4a^2c^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
$\cos(c_1) = \dfrac{c^2\sqrt{4a^2b^2 - 4S^2}}{2S^2} - 1$
La hauteur du tétraèdre est alors :
$h = AA_2 \sin(a_1) = \dfrac{S}{a} \sin(a_1)$
Pour faiire une animation on a besoin de connaitre les angles a_1, b_1, c_1.
On fait calculer ces angles par `Xcas` avec les formules ci-dessus.
On tape :
```
c:=longueur(A,B);b:=longueur(A,C);a:=longueur(C,B);p:=(a+b+c)/2
```
On obtient :
```
6,6.10327780787,3.64005494464,7.87166637625
```
On tape :
```
S:=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c));2*S/c;R:=a*b*c/4/S;sqrt(4*R^2-c^2)
```
On obtient :
```
10.5,3.5,3.17375236615,2.07142857143
```
On tape :
```
a1:=acos(-1+a^2*sqrt(c^2*b^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-a1
```
On obtient :

`0.638952150388,2.5026405032`
On tape :
`b1:=acos(-1+b^2*sqrt(c^2*a^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-b1`
On obtient :
`1.55719046484,1.58440218875`
On tape :
`c1:=acos(-1+c^2*sqrt(a^2*b^2-4*S^2)/(2*S^2));pi-c1`
On obtient :
`1.3860741241,1.75551852949`
On tape :
`h:=S/a*sin(a1)`
On obtient :
`1.72022779697`
Le sommet du tétraèdre est donc :
`Q:= point(5.0,1.42857142857,1.72022779697)` On tape :
`angle(plan(Q,M,P),plan(M,N,P))`
On obtient $\pi - a_1$:
`2.5026405032`
On tape :
`angle(plan(Q,P,M),plan(M,N,P))`
On obtient a_1 :
`0.638952150388`

11.2.3 Réalisation d'une animation du pliage

```
animtriABC(t):={
local A,B,C,M,N,P,S1,S2,S3;
A:=point(0,0,0):;
B:=point(6,0,0);
C:=point(5,3.5,0);
triangle(A,B,C);
M:=milieu(A,B);
N:=milieu(B,C);
P:=milieu(A,C);
S1:=rotation(droite(M,P),t,A);
S2:=rotation(droite(N,M),t*1.58/2.5,B);
S3:=rotation(droite(P,N),t*1.76/2.5,C);
retourne triangle(M,P,S1),triangle(N,M,S2),triangle(N,P,S3);
}:;
```

Puis, on tape : `L1:=seq([animtriABC(t)],t=0..2.5,0.1):;`
`L2:=seq([animtriABC(t)],t=2.5..0,-0.1):;`
`affichage(Q,1+epaisseur_point_2),animation(L1,L2)`
On obtient :



Chapitre 12

Compléments

12.1 Le tableur de Xcas

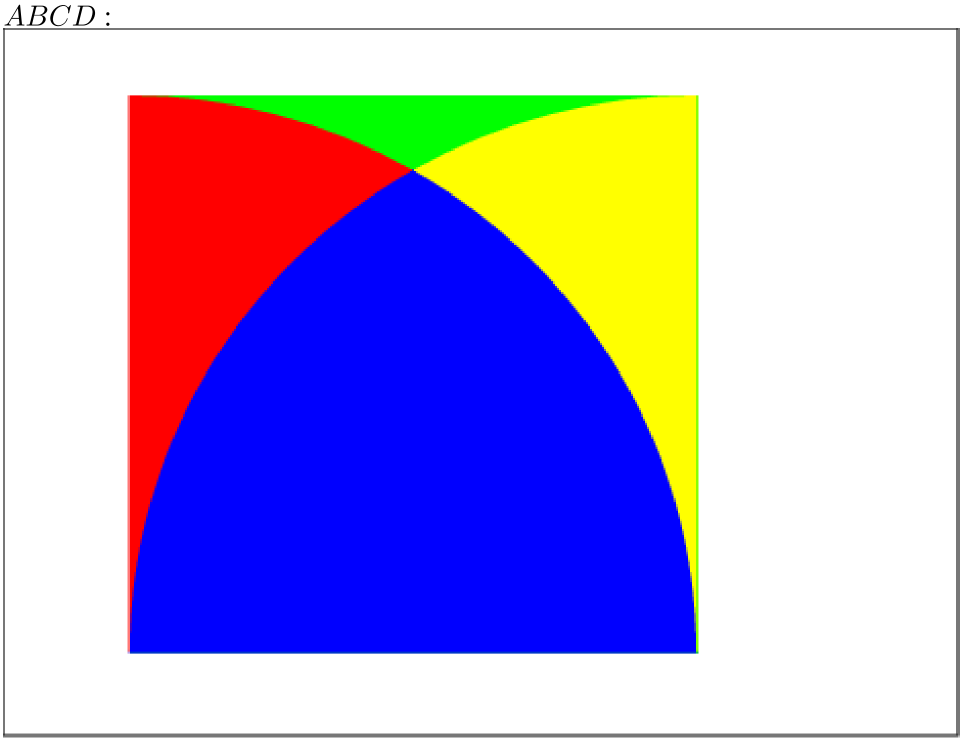
On va utiliser le tableur sur un exemple.
L'énoncé
Au 1ier janvier 2010, A veut emprunter 120000 euros. Les intérêts de cet emprunt ont un taux de 3.8 % si la durée du prêt est inférieur ou égale à 15 ans et un taux de 4 % l'an si la durée du prêt est entre 15 et 20 ans.
Le remboursement du pret se fait annuellement : 1ier remboursement 1ier janvier 2011, 2nd remboursement 1ier janvier 2012 etc...).
Sachant que A souhaite un remboursement annuel égal à 9600 euros (soit 800 euros par mois), quel sera dans ce cas le taux de son emprunt et en combien de temps le prêt sera-t-il rembourser ?
Donner le coût de l'emprunt.
Trouver par essais-erreurs le montant du remboursement annuel minimum pour pouvoir bénéficier du taux de 3.8%.
Calculer alors le coût de l'emprunt dans ce cas.
On ouvre un niveau de tableur (Alt+t) :
Dans A_0, on tape 120000
Dans B_0, on tape 0.038
Dans C_0, on tape 9600
Dans A_1, on tape $= A_0 + A_0 * \$B\$0 - \$C\$0$
puis on recopie cette formule vers le bas on trouve en A_j les sommes à rembourser au début de la $j$ième année.
On a A_{17} =2595.92037452 ce qui veut dire qu'au 1ier janvier 2027 il reste encore à rembourser=2595.92 euros donc au 1ier janvier 2028 il faudra encore rembourser : 2595.92037452*1.038=2694.56534875$\simeq$ 2694.57 euros (ou encore A_{18} =-6905.43465124 donc au 1ier janvier 2028 il faudra encore rembourser 9600-6905.43465124=2694.56534876$\simeq$ 2694.57 euros).
Donc le taux applicable dans ce cas est de 4%.
On modifie la valeur de B_0 on remplace 0.38 par 0.04.
On obtient alors :
A_{17} =6251.94053315 ce qui veut dire qu'au 1ier janvier 2027 (apres 17 remboursements de 9600 euros) il reste encore à rembourser=6251.94 euros donc au 1ier janvier à la fin de l'année 2028 il faudra encore rembourser 6251.94053315*1.04=6502.01815448$\simeq$ 6502.02 euros (ou encore A_{18} =-3097.98184553 donc au 1ier janvier de l'année

2028 il faudra encore rembourser 9600-3097.98184553=6502.01815447$\simeq$ 6502.02 euros).
Le coût de l'emprunt est donc :
17*9600+6502.02-120000=49702.02 euros
Le banquier offre un taux de 3.8 % si la durée du prêt est inférieur ou égale à 15 ans.
On fait des essais en augmentant le montant du remboursement la valeur de la case A_{15} (somme qui reste due au bout de 15 ans i.e après 15 remboursements) soit négative.
On trouve que pour un remboursement annuel de 10643 euros (soit environ 887 euros par mois) A_{15}=-9.06558396714.
Le montant des intérêts est donc de :
10643*15-9.06558396714-120000=39635.934416$\simeq$ 39635.93 euros

12.2 La géométrie 2d de Xcas

12.2.1 L'aire d'un secteur circulaire

Soit un carré $ABCD$ tel que $AB = 1$.
On trace l'arc de cercle BD de centre A et de rayon 1 et l'arc de cercle AC de centre B et de rayon 1.
Ces 2 arcs se coupent en F et déterminent les 4 régions ci-dessous dans le carré $ABCD$:

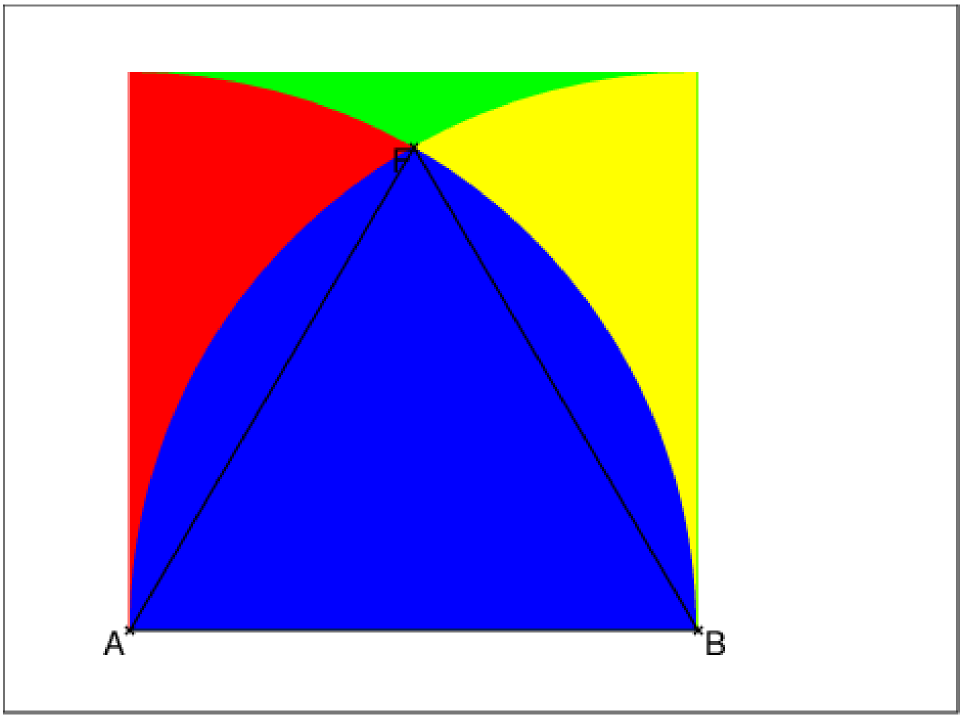


Calculer l'aire de chacune de ces régions.

Pour faire le dessin, on a tapé :

```
carre(0,1,affichage=vert+rempli);
cercle(0,1,pi/3,pi/2,affichage=1+rempli);
```

```
cercle(1,1,pi/2,2*pi/3,affichage=3+rempli);
cercle(0,1,0,pi/3,affichage=4+rempli);
cercle(1,1,2*pi/3,pi,affichage=4+rempli);
```



La somme de l'aire bleue et de l'aire du triangle èquilatèral ABF est égale à 2 fois l'aire d'un secteur angulaire d'angle $\pi/3$ et de rayon 1.
L'aire d'un secteur angulaire d'angle $\pi/3$ et de rayon 1 est égale à :
$\pi/6$
L'aire du triangle èquilatèral ABF est égale à :
$\sqrt{3}/4$
L'aire bleue est donc égale à :
$2*\pi/6-\sqrt{3}/4=\pi/3-\sqrt{3}/4$
On tape :
`evalf(pi/3-sqrt(3)/4)`
On obtient l'aire bleue :
`0.614184849304`
L'aire rouge est égale à l'aire jaune et c'est aussi la difference entre l'aire du secteur angulaire d'angle $\pi/2$ et de rayon 1 avec l'aire bleue. L'aire rouge est donc égale à $\pi/4-\pi/3+\sqrt{3}/4=\sqrt{3}/4-\pi/12$.
On tape :
`evalf(-pi/12+sqrt(3)/4)`
On obtient l'aire rouge ou l'aire jaune :
`0.171213314093`
L'aire verte est égale à la difference entre l'aire du carré et la somme de l'aire rouge de l'aire jaune et de l'aire bleue.
L'aire verte est donc égale à :
$1-(-\pi/6+\sqrt{3}/2+\pi/3-\sqrt{3}/4)=1-\pi/6-\sqrt{3}/4$.
On tape :
`evalf(1-pi/6-sqrt(3)/4)`

On obtient l'aire verte :
`0.0433885225095`

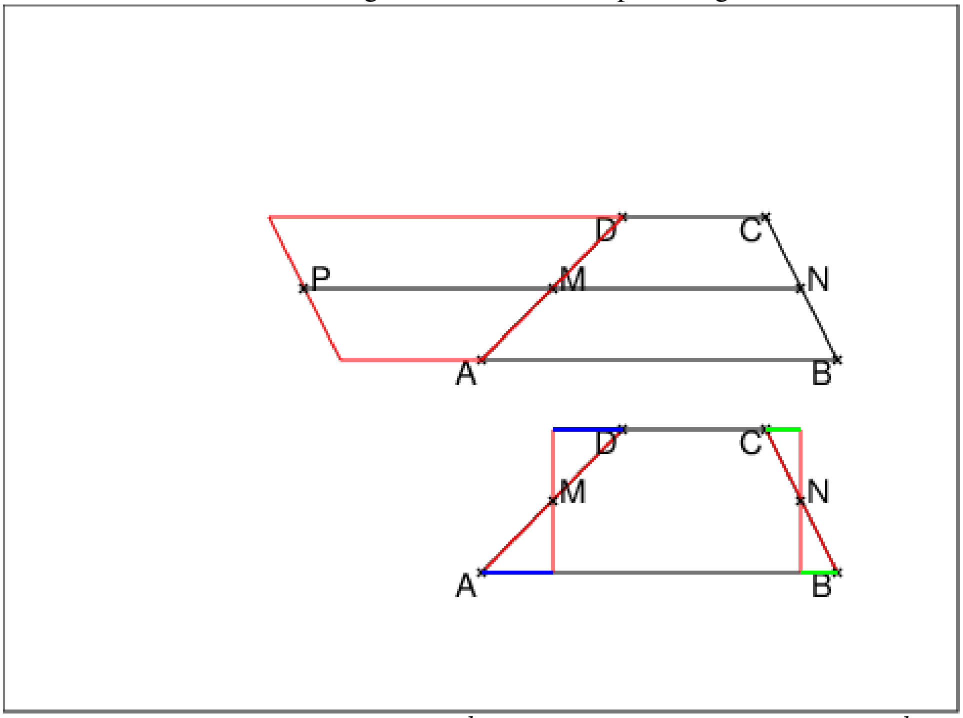
12.2.2 Le trapèze

Longueur du segment joignant les milieux des côtés non parallèles et aire d'un trapèze

Soient ABD un trapèze : $AB//DC$,$AB = a, DC = b$), M le milieu de AD, N le milieu de BC et les parallèles AB et DC sont distantes de h.

— Calculer la longueur du segment MN en fonction de a et b.
— Calculer l'aire du trapèze en fonction de a et b et h.
— Faire un dessin qui montre ces résultats d'un coup d'œil.

On fait les dessins :
la figure 1 est obtenue en traçant un trapèze et son symétrique par rapport à M et on obtient un parallélogramme dont 2 côtés paralléles sont de longueur $2MN$ distant de h,
la figure 2 est obtenue en traçant les segments perpendiculaires à AB passant par M et N et on obtient un rectangle dont les côtés ont pour longueur MN et h



On montre facilement que $MN = \frac{a+b}{2}$ et que l'aire du trapèze vaut $h(\frac{a+b}{2})$.
En effet :
la figure 1 est obtenue en tracant un trapèze et son symétrique par rapport à M ce qui forme un parallélogramme donc $2MN = a + b$. L'aire du trapèze est égale à l'aire du parallélogramme et vaut donc $h(\frac{a+b}{2})$.
la figure 2 on a $MN = AB - x - y = CD + x + y$ où x (resp y) sont les longueurs des segments en bleu (resp vert). Donc $2 * MN = AB - x - yCD + x + y = AB + CD = a + b$.

L'aire du trapèze est égale à l'aire du rectangle et vaut donc $h(\frac{a+b}{2})$.

Pavage avec un trapèze

Soit un trapèze $ABCD$ rectangle en A et vérifiant : $AB = 2DC = 2AD$.
On dira que ce trapèze est à droite si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\pi/2$ et qu'il est à gauche si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\pi/2$

— Avec `Xcas`, écrire une fonction `trapd(A,B)` (resp `trapg(A,B)`) qui étant donné `A` et `B` dessine le trapèze à droite (resp à gauche) `ABCD` (on pourra dans un premier temps supposé que le segment AB est horizontal, dans un deuxième temps que le segment AB est horizontal ou vertical et dans un troisième temps (trop difficile pour la classe de troisième) que le segment AB est quelconque.

— Pour faire le dessin avec `Xcas`, en colorant la surface de ces trapèzes, modifier les fonctions précédentes en `trapdr(A,B,c)` et `trapgr(A,B,c)` pour que étant donné `A` et `B` ces fonctions dessinent le trapèze `ABCD` à droite et le trapèze à gauche) dont la surface est de couleur `c` (on pourra dans un premier temps supposé que le segment AB est horizontal etc...).

— Lorsque $ABCD$ est un trapèze à droite trouver un pavage de $ABCD$ par 4 trapèzes de même dimension à savoir 3 trapèzes rectangles à droite et 1 trapèze rectangle à gauche.
— même question lorsque $ABCD$ est un trapèze à gauche.
— Faire le dessin de ces pavages avec `Xcas` en utilisant `trapd(A,B)` et `trapg(A,B)`.
— Modifier `trapd(A,B)` (resp `trapg(A,B)`) en supposant que le segment AB est horizontal ou vertical.

— La chambre d'un trapéziste a la forme d'un rectangle $ABCD$ $AB = 4.5m$ et $AD = 3m$. Il veut paver sa chambre avec 4 trapèzes rectangles de couleur différentes (à droite ou à gauche). Donner lui un ou plusieurs exemple de pavages.
— Écrire une fonction `trapd2(A,B)` et `trapg2(A,B)` qui étant donné `A` et `B` (AB horizontal ou vertical) dessine le trapèze `ABCD` dans lequel les 4 trapèzes formant le pavage sont eux aussi pavés par 4 trapèzes.
— Paver la chambre du trapéziste avec 4*4=16 trapèzes à droite ou à gauche en utilisant trapg2(A,B). Donnerlui un ou plusieurs exemple de pavages.

La solution

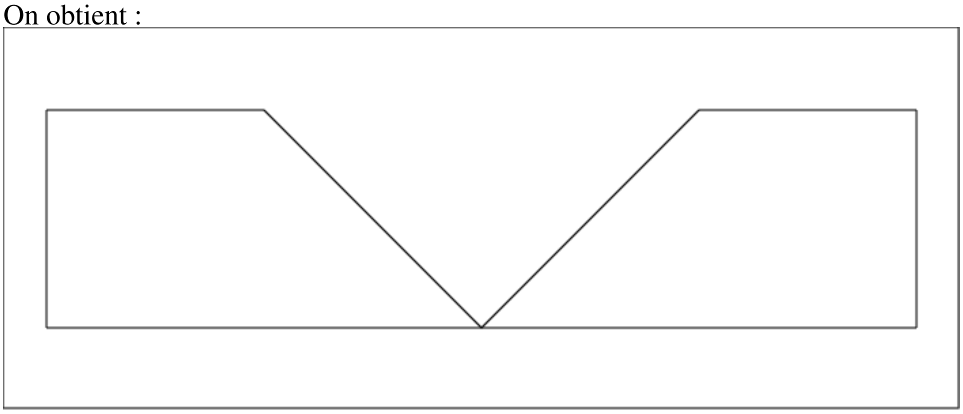
— On suppose que AB est horizontal, on tape :
```
trapd(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
```

```
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapg(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
```

On tape :

```
trapd(0,10),trapg(20,10)
```

On obtient :



— Avec des trapèzes remplis avec la couleur c :

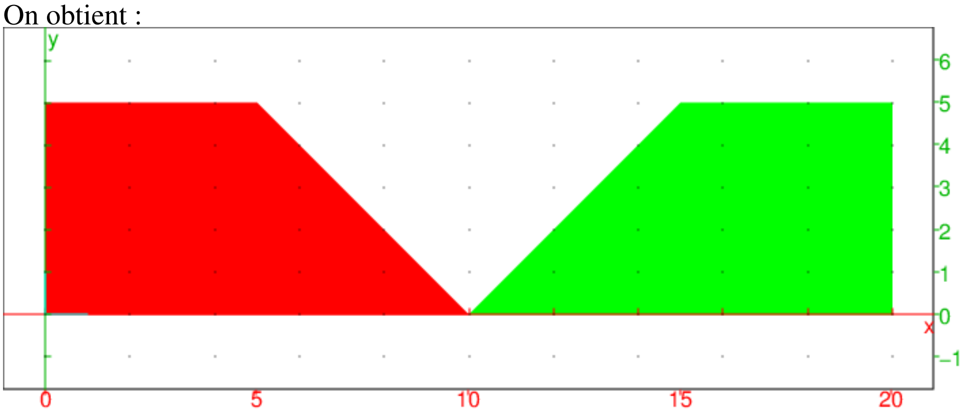
```
trapdr(A,B,c):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+c);
}:;
trapgr(A,B,c):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
```

```
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+c);
}:;
```

On tape :

```
trapdr(0,10,1),trapgr(20,10,2)
```

On obtient :



— Le pavage du trapèze droit (on suppose que AB est horizontal) avec 4 trapèzes non rempli et rempli.
On remarquera qu'il est inutile de tracer le trapèze pour lequel les bases sont verticales.

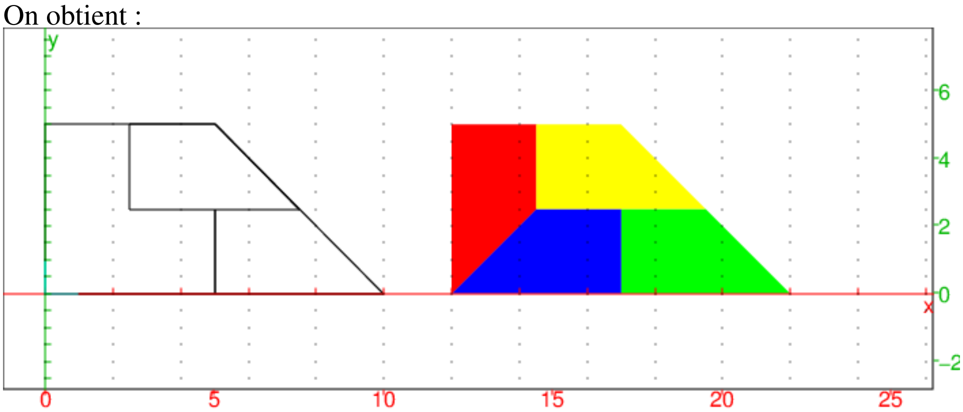
```
pavaged(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapd(A,B);
G:=milieu(A,B);
L:=L,trapd(G,B);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
L:=L,trapd(E,F);
L:=L,trapg(G,A);
retourne L;
}:;
pavagedr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapdr(A,B,c1);
G:=milieu(A,B);
```

```
L:=L,trapdr(G,B,c2);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
L:=L,trapdr(E,F,c3);
L:=L,trapgr(G,A,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

`pavaged(0,10),pavagedr(point(12),point(25),1,2,3,4)`

On obtient :



— Le pavage du trapèze gauche (on suppose que AB est horizontal) avec 4 trapèzes non rempli et rempli.
On remarquera qu'il est inutile de tracer le trapèze pour lequel AB est vertical.

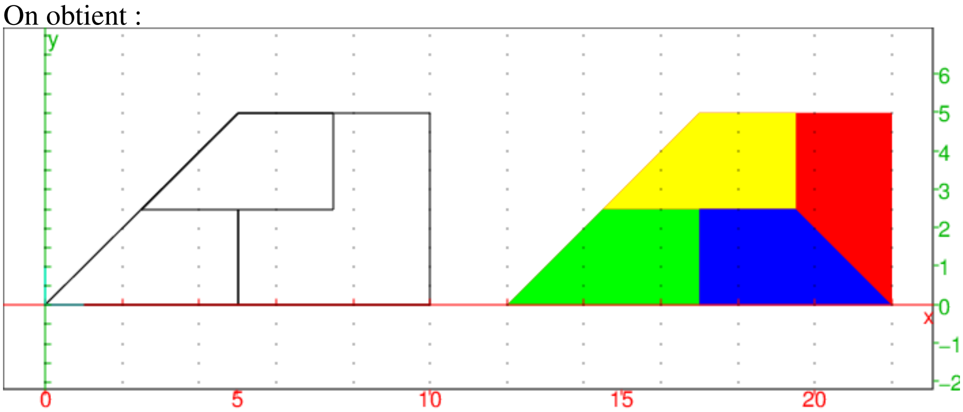
```
pavageg(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors retourne "AB n'est pas horizontal"; fsi;
L:=trapg(A,B);
L:=L,trapg(milieu(A,B),B);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
L:=L,trapg(E,F);
G:=point(a1+(b1-a1)/2,a2)
L:=L,trapd(G,A);
retourne L;
}:;
pavagegr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si b2!=a2 alors
```

```
 retourne "AB n'est pas horizontal";
fsi;
L:=trapgr(A,B,c1);
G:=milieu(A,B);
L:=L,trapgr(G,B,c2);
E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
L:=L,trapgr(E,F,c3);
L:=L,trapdr(G,A,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
pavageg(10,0),pavagegr(point(22),point(12))
```

On obtient :



— On suppose que AB est horizontal ou vertical, on tape :

```
trapdv(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
 retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1-(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1-(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapdvr(A,B,coul):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
```

```
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2+(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2+(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1-(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1-(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+coul);
}:;
trapgv(A,B):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1+(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1+(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
retourne quadrilatere(A,B,C,D);
}:;
trapgvr(A,B,coul):={
local a1,a2,b1,b2,D,C;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (a1!=b1 et b2!=a2) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
si (a2==b2) alors
  D:=point(a1,a2-(b1-a1)/2);
  C:=point(a1+(b1-a1)/2,a2-(b1-a1)/2);
sinon
  D:=point(a1+(b2-a2)/2,a2);
  C:=point(a1+(b2-a2)/2,a2+(b2-a2)/2);
fsi
```

```
retourne quadrilatere(A,B,C,D,affichage=rempli+coul);
}:;
```

— On peut réécrire les fonctions pavages lorsqu'on suppose AB horizontal ou vertical.
On tape pour avoir le pavage droit avec 4 trapèzes rempli avec les couleurs $c1, c2, c3, c4$:

```
pavagedvr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (b2!=a2 et a1!=b1) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
G:=milieu(A,B);
L:=trapdvr(G,B,c2);
L:=L,trapgvr(G,A,c4);
si (a2==b2) alors
  L:=L,trapdvr(point(a1,a2+(b1-a1)/2),A,c1);
  E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
  F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2+(b1-a1)/4);
  L:=L,trapdvr(E,F,c3);
sinon
  L:=L,trapdvr(point(a1-(b2-a2)/2,a2),A,c1);
  E:=point(a1-(b2-a2)/4,a2+(b2-a2)/4);
  F:=point(a1-(b2-a2)/4,a2+3*(b2-a2)/4);
  L:=L,trapdvr(E,F,c3);
fsi;
retourne L;
}:;
```

On tape pour avoir le pavage droit avec 4 trapèzes rempli avec les couleurs $c1, c2, c3, c4$:

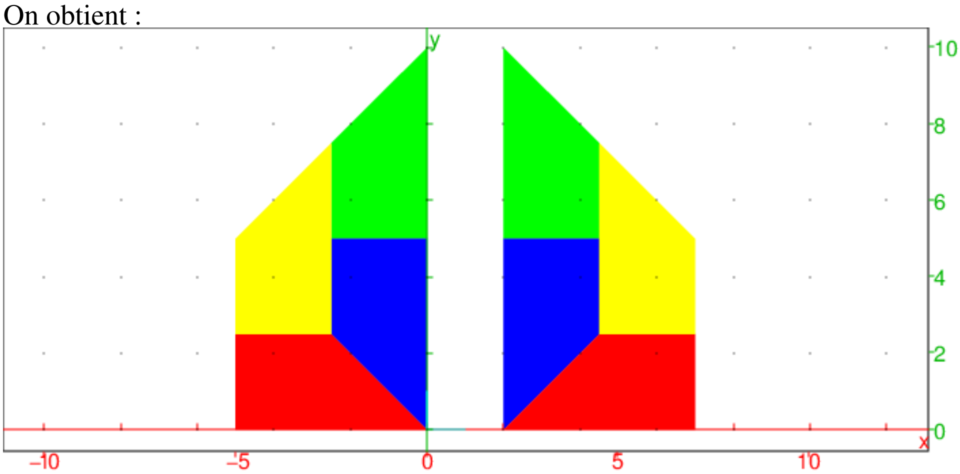
```
pavagegvr(A,B,c1,c2,c3,c4):={
local a1,a2,b1,b2,E,F,G,L;
a1:=abscisse(A);
b1:=abscisse(B);
a2:=ordonnee(A);
b2:=ordonnee(B);
si (b2!=a2 et a1!=b1) alors
  retourne "AB n'est ni horizontal ni vertical";
fsi;
G:=milieu(A,B);
L:=trapgvr(G,B,c2);
L:=L,trapdvr(G,A,c4);
si (a2==b2) alors
  L:=L,trapgvr(point(a1,(a1-b1)/2),A,c1);
  E:=point(a1+(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
```

```
  F:=point(a1+3*(b1-a1)/4,a2-(b1-a1)/4);
  L:=L,trapgvr(E,F,c3);
sinon
  L:=L,trapgvr(point(a1+(b2-a2)/2,a2),A,c1);
  E:=point(a1+(b2-a2)/4,a2+(b2-a2)/4);
  F:=point(a1+(b2-a2)/4,a2+3*(b2-a2)/4);
  L:=L,trapgvr(E,F,c3);
fsi;
retourne L;
}:;
```

On tape :

`pavagedvr(0,10*i,1,2,3,4),pavagegvr(2,2+10i,1,2,3,4)`

On obtient :



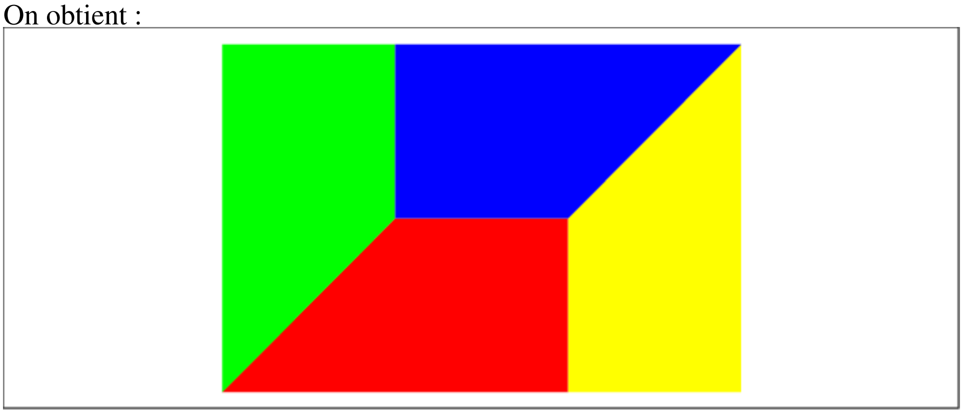
— `trapezist4(c1,c2,c3,c4):={`

```
local L;
L:=trapgvr(3,0,c1);
L:=L,trapdvr(3*i,0,c2);
L:=L,trapdvr(4.5,4.5+3*i,c3);
L:=L,trapgvr(1.5+3*i,4.5+3*i,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

`trapezist4(1,2,3,4)`

On obtient :



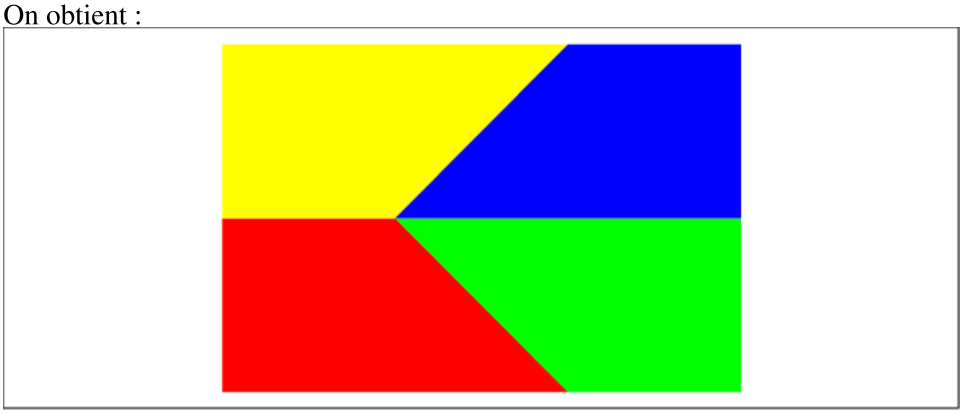
une autre possibilité :

```
trapeziste4(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=trapdvr(0,3,c1);
L:=L,trapdvr(4.5+1.5*i,1.5+1.5*i,c2);
L:=L,trapgvr(3*i,3+3*i,c3);
L:=L,trapgvr(4.5+1.5*i,1.5+1.5*i,c4);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
trapeziste4(1,2,3,4)
```

On obtient :



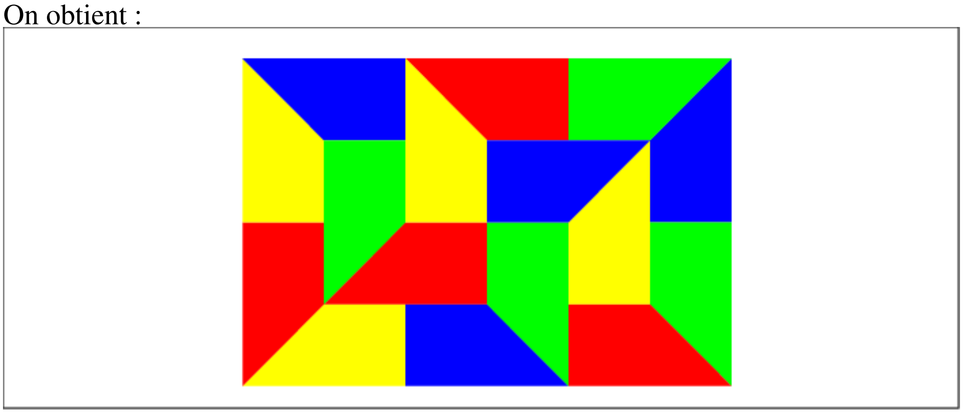
— Pavage avec 16 trapèzes

```
trapezist16(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=pavagegvr(3,0,c2,c3,c1,c4);
L:=L,pavagedvr(3*i,0,c4,c1,c2,c3);
L:=L,pavagedvr(4.5,4.5+3*i,c1,c4,c3,c2);
L:=L,pavagegvr(1.5+3*i,4.5+3*i,c3,c2,c4,c1);
retourne L;
}:;
```

On tape :

```
trapezist16(1,2,3,4)
```

On obtient :



— Un exemple de pavage d'un carré avec 24 trapèzes

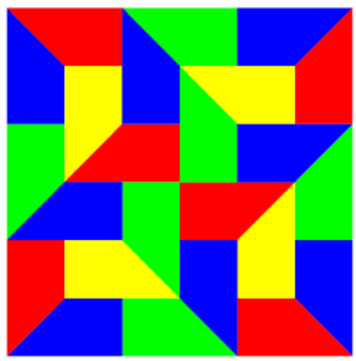
```
tapis(c1,c2,c3,c4):={
local L;
L:=pavagedvr(0,3,c1,c2,c3,c4);
```

```
L:=L,pavagedvr(4.5,4.5+3*i,c1,c2,c3,c4);
L:=L,pavagedvr(4.5+4.5*i,1.5+4.5*i,c1,c2,c3,c4);
L:=L,pavagedvr(4.5*i,1.5*i,c1,c2,c3,c4);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,3.75+2.25*i,c1);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,2.25+3.75*i,c2);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,0.75+2.25*i,c1);
L:=L,trapgvr(2.25+2.25*i,2.25+0.75*i,c2);
L:=L,trapgvr(3+1.5*i,3,c4),trapgvr(3+3*i,4.5+3*i,c4);
L:=L,trapgvr(1.5+3*i,1.5+4.5*i,c4);
L:=L,trapgvr(1.5+1.5*i,1.5*i,c4);
return L;
}:;
```

On tape :

```
tapis(1,2,3,4)
```

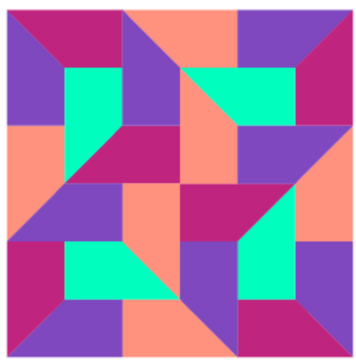
On obtient :



On tape :

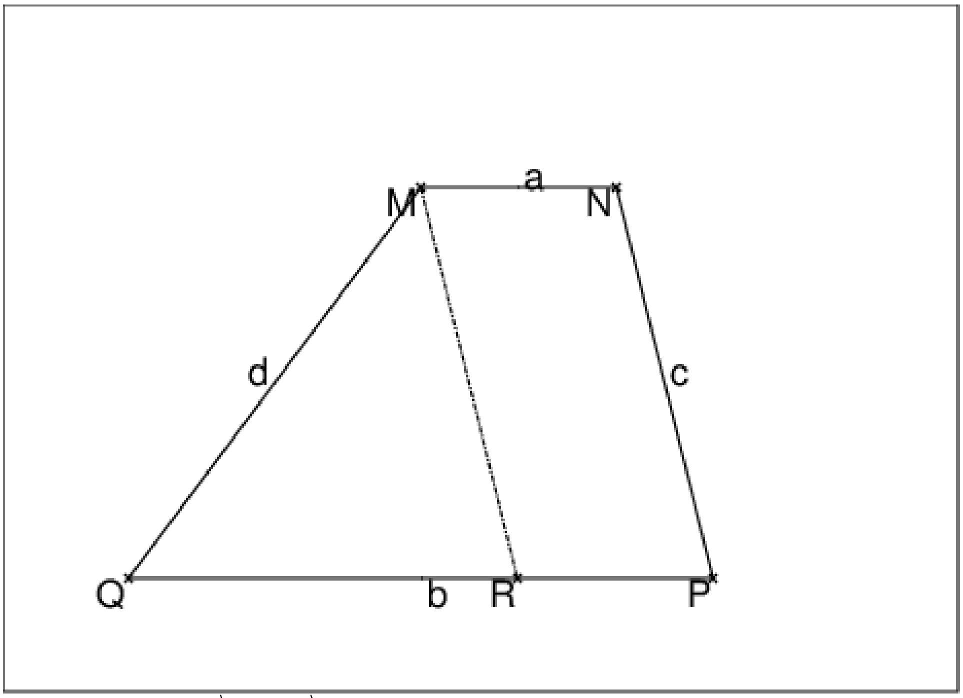
```
tapis(161,172,183,194)
```

On obtient :

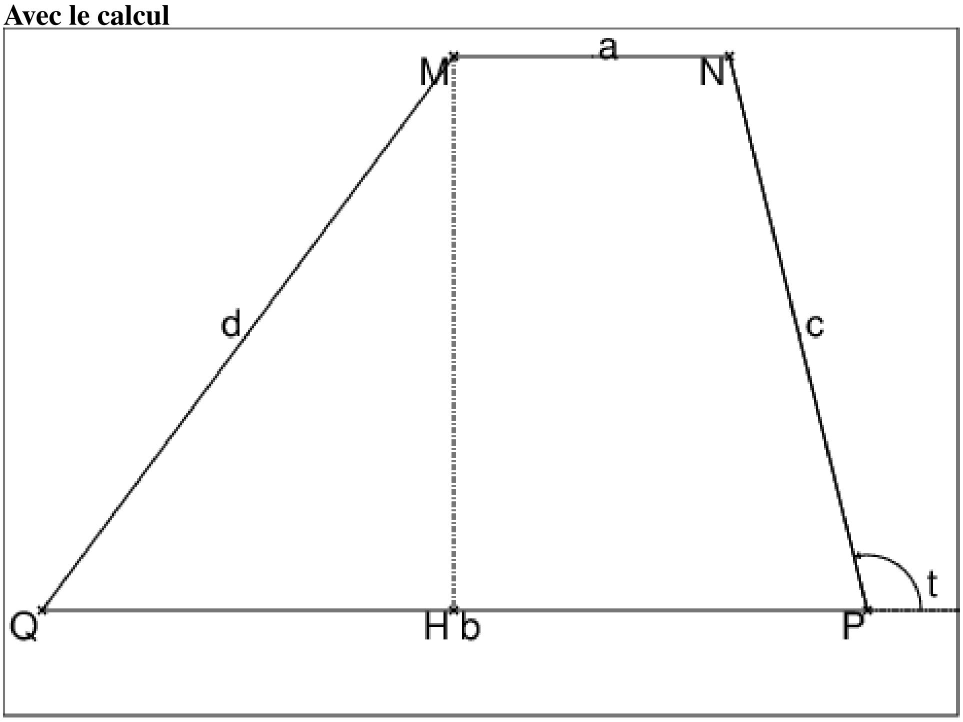


Inégalités entre les côtés d'un trapèze

Soit un trapèze $MNPQ$ ayant comme petite base $MN = a$, comme grande base $PQ = b$ ($a \leq b$) et comme autres côtés $NP = c$ et $MQ = d$.
Quelles inégalités doivent vérifier a, b, c, d pour que a, b, c, d soient les côtés d'un trapèze $MNPQ$ de petie base $MN = a$ et de grande base $PQ = b$ ($a \leq b$) ?
Avec la géométrie



Soit R tel que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NP}$. $MNPR$ est donc un parallélogramme de côtés a et c et $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$ donc $QR = b - a$.
MRQ est un triangle de côtés : $MR = c$, $QR = b - a$ et $MQ = d$.
On peut toujours tracer un parallélogramme de côtés a et c mais on ne peut tracer un triangle de côtés c, $b - a$ et d si et seulement si : $|d - c| < b - a < c + d$ (ou encore $|b - a - c| < d < b - a + c$).
Avec le calcul

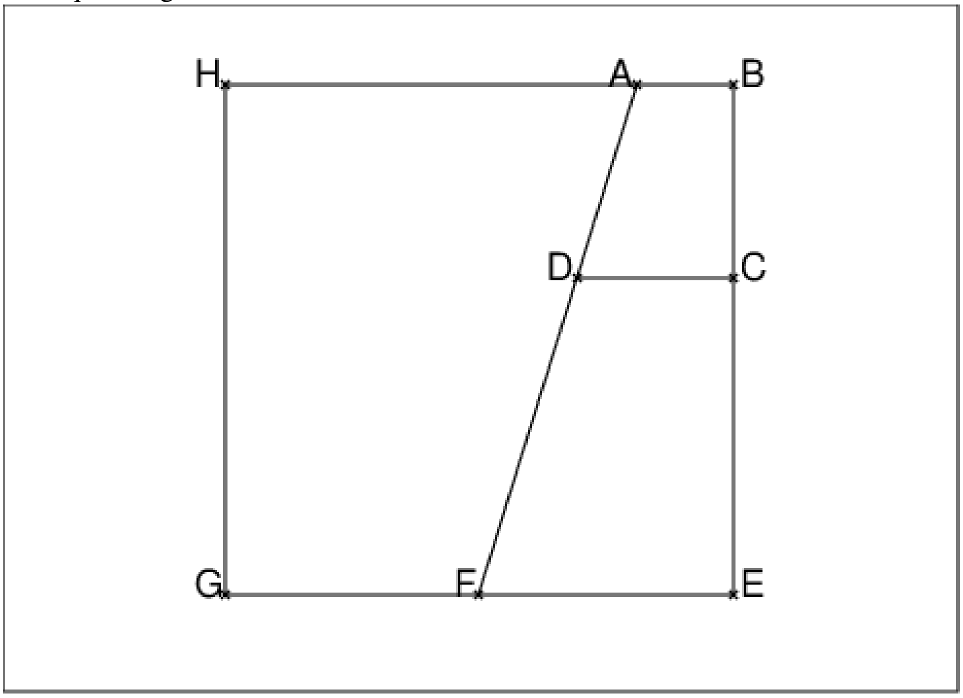


Soit H la projection orthogonale de M sur PQ.
Posons $h = MH$ et $t = (\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PN})$

On a :
$h = c\sin(t)$ et
$d^2 = h^2 + (b - a + c\cos(t))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ba + 2c\cos(t)(b - a)$ donc
$\cos(t) = \dfrac{d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba}{2c(b - a)}$
Pour pouvoir définir t il faut donc que : $-1 < \dfrac{d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba}{2c(b - a)} < 1$
Comme $2c(b - a) > 0$, cela est équivalent à :
$-2c(b - a) < \ d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ba \ < 2c(b - a)$ ou encore :
$a^2 + b^2 + c^2 - 2ba - 2cb + 2ca < d^2 < a^2 + b^2 + c^2 - 2ba + 2cb - 2ca$ i.e.
$(b - a - c)^2 < d^2 < (c + b - a)^2$
Donc la condition est puisque $d > 0$ et $b - a + c > 0$:
$|b - a - c| < d < b - a + c$

Pavage d'un carré avec 3 trapèzes semblables

On considère un carré que l'on veut paver avec 3 trapèzes semblables comme l'indique la figure :



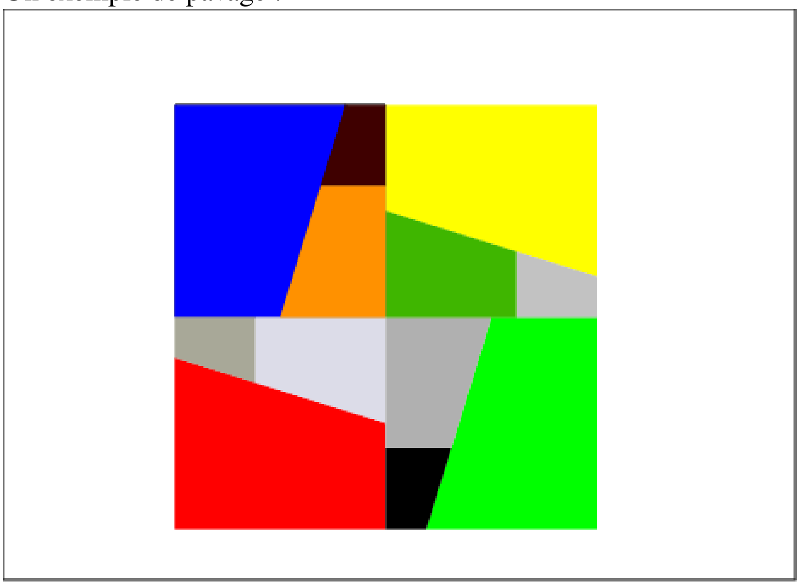
On veut qu'il existe $k > 0$ tel que :
$ABCD$ et $DCEF$ soient semblables avec $DC = k * AB$
$DCEF$ et $FGHA$ soient semblables avec $DC = k * GF$
Quelles sont les conditions pour que cela soit possible ?

Les trapèzes $ABCD$ et $DCEF$ sont semblables donc il existe k tel que :
$DC = k * AB$, $EF = k * CD$ et $CE = k * BC$.
Les trapèzes $DCEF$ et $FGHA$ sont semblables de rapport k donc :
$HA = k * GF$ et $GF = k * CE$.
Posons $a = AB$ et $b = BC$ on a :
$CD = ka$, $GF = k^2a$, $HA = k^3a$ et $CE = kb$ et $GH = k^2b$.
Donc $AB = a$, $GE = 2k^2a$, $HB = (1 + k^3)a$, $BE = (1 + k)b$ et $GH = k^2b$.

Donc puisque $HBEG$ est un carré on a :
$GE = HB$ donc $1 + k^3 = 2k^2$, $BE = HG$ donc $1 + k = k^2$ et
$GE = HG$ donc $2k^2 a = k^2 b$ i.e. $b = 2a$.
On tape :
`solve(1+k^3=2k^2,k)`
On obtient :
`[(-(sqrt(5))+1)/2,1,(sqrt(5)+1)/2]`
On tape :
`solve(1+k=k^2,k)`
On obtient :
`[(-(sqrt(5))+1)/2,(sqrt(5)+1)/2]`
Donc pour que cela soit possible il faut que :
$b = 2a$ et $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (on trouve pour k le nombre d'or !).
On tape :

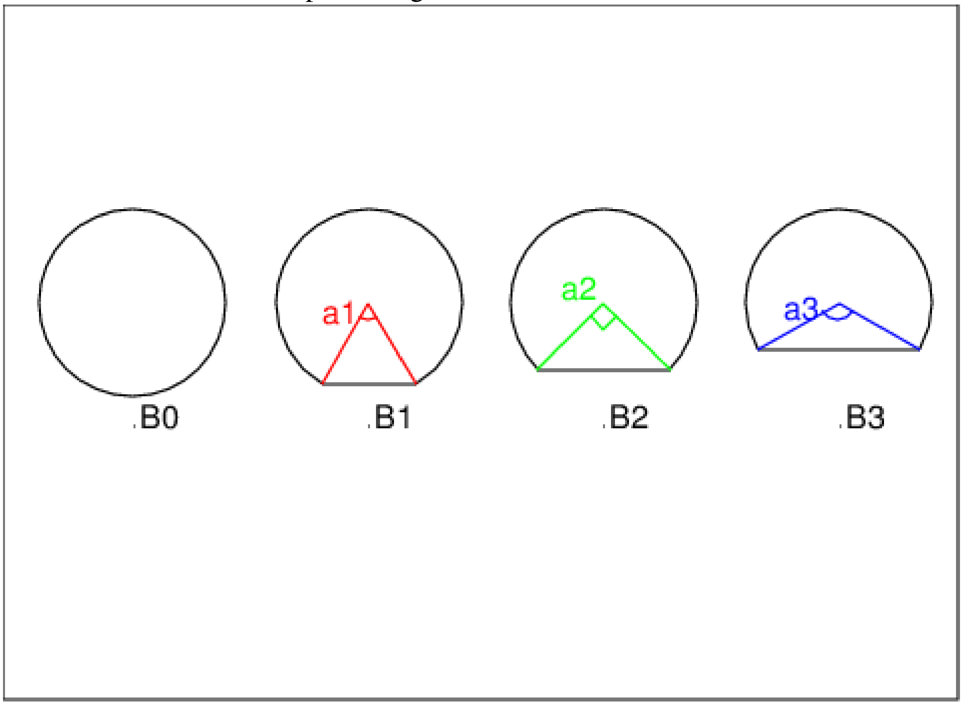
```
k:=(1+sqrt(5))/2;
A:=point(3+4i,affichage=quadrant2);
B:=point(4+4i,affichage=quadrant1);
C:=point(4+2i,affichage=quadrant1);
D:=point(4-k+2i,affichage=quadrant2);
E:=point(4+(2-2*k)*i,affichage=quadrant1);
F:=point(4-k^2+(2-2*k)*i,affichage=quadrant2);
G:=point(4-2*k^2+(2-2*k)*i,affichage=quadrant2);
H:=point(4-2*k^2+4*i,affichage=quadrant2);
polygone(H,B,E,G);
segment(C,D);
segment(A,F);
est_carre(H,B,E,G);
```

On obtient la figure ci-dessus et `est_carre(H,B,E,G)` renvoie `1`.
Un exemple de pavage :

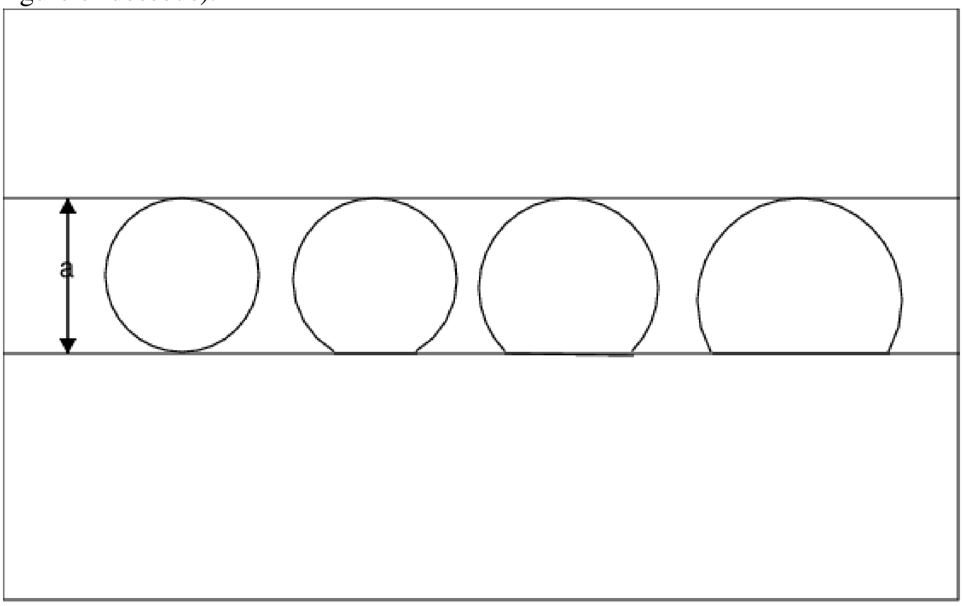


12.2.3 Le bassin et la piscine

Les Bassins Voici 4 bassins $B-0, B_1, B_2, B_3$. Ils sont formés par un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre $a_0 = 2\pi$, $a_1 = 5\pi/3$, $a_2 = 3\pi/2$, $a_3 = 4\pi/3$ et on ferme les 3 derniers par un segment :



Calculer les aires S_k de 4 bassins B_k $(k = 1, 2, 3)$ en fonction de r.
Sur une bande de terre de largeur a, on veut implanter l'un de ces bassins (cf la figure ci-dessous).



Calculer pour chaque bassin la valeur de r en fonction de a. Calculer en fonction de a les aires A_k de 4 bassins B_k $(k = 1, 2, 3)$.
0n suppose maintenant que $a = 3$.
Quel est alors le bassin qui a la plus grande surface ?

Montrer que B_3 est inscrit dans un rectangle de largeur 3 et de longueur 4. On coupe alors les bassins Bk ($k = 0, 1, 2, 3$) selon leur axe de symétrie et on accole chacune des ces moitiés à un rectangle de façon à ce que chaque bassin soit inscrit dans un rectangle de largeur 3 et de longueur 4.
Calculer alors l'aire de ces nouveaux bassins C_k ($k = 0, 1, 2, 3$)
Quel est alors le bassin C_k ($k = 0, 1, 2, 3$) qui a la plus grande surface ?

Calcul à la main
Pour calculer les aires des bassins, il faut connaitre l'aire d'un secteur angulaire et l'aire d'un triangle.
L'aire d'un triangle equilatéral de côté r est $\sqrt{3}r^2/4$.
L'aire d'un triangle rectangle isocèle de côtés $r, r, r\sqrt{2}$ est $r^2/2$.
L'aire d'un triangle isocèle d'angle $2\pi/3, \pi/6, \pi/6$, de côtés $r, r, r\sqrt{3}$ est $\sqrt{3}r^2/4$.
On a :
$S_0 = \pi r^2$
$S_1 = 5\pi r^2/6 + \sqrt{3}r^2/4$
$S_2 = 3\pi r^2/4 + r^2/2$
$S_3 = 2\pi r^2/3 + \sqrt{3}r^2/4$

Pour calculer les rayons des bassins implantés sur une bande de terre de largeur a, on doit résoudre les équations :
$a = 2 * r_0$ donc $r_0 = a/2$
$a = r_1 + r_1\sqrt{3}/2$ donc $r_1 = 2a/(2 + \sqrt{3}) = 2a(2 - \sqrt{3})$
$a = r_2 + r_2\sqrt{2}/2$ donc $r_2 = 2a/(2 + \sqrt{2}) = a(2 - \sqrt{2})$
$a = r_3 + r_3/2$ donc $r_3 = 2a/3$
Les aires A_k ($k = 1, 2, 3$) des différents bassins sont donc :
$A_0(a) = \pi a^2/4$ $A_1(a) = 5\pi r_1^2/6 + \sqrt{3}r_1^2/4 = 4a^2(2 - \sqrt{3})^2(5\pi/6 + \sqrt{3}/4) = a^2(7 - 4\sqrt{3})(10\pi/3 + \sqrt{3})$
$A_2(a) = 3\pi r_2^2/4 + r_2^2/2 = a^2(2 - \sqrt{2})^2(3\pi/4 + 1/2) = (3\pi/2 + 1)a^2(3 - \sqrt{2})$
$A_3(a) = 2\pi r_3^2/3 + \sqrt{3}r_3^2/4 = 4a^2/9(2\pi/3 + \sqrt{3}/4) = a^2(8\pi/27 + \sqrt{3}/9)$
Puis, on fait un calcul approché avec `Xcas`.

Calcul avec `Xcas`
Pour le bassin B_0 son aire $S_0 = \pi r^2$/ Pour les bassins B_k ($k = 1, 2, 3$), on cherche les coordonnées des segments A_kB_k qui ferment les bassins B_k.
Avec `Xcas`, on tape pour faire le dessin :
```
assume(r=[1,-5,5,0.1])
B0:=cercle(point(-5,0),r)
B1:=cercle(-5/2,r,-pi/3,4*pi/3),
segment(-5/2+r*(-1/2-i*sqrt(3)/2),-5/2+r*(1/2-i*sqrt(3)/2))
B2:=cercle(0,r,-pi/4,5*pi/4),
segment(r*(-sqrt(2)/2*(1+i)),r*(sqrt(2)/2*(1-i)))
B3:=cercle(5/2,r,-pi/6,7*pi/6),
segment(5/2+r*(-sqrt(3)/2-i/2),5/2+r*(sqrt(3)/2-i/2))
```
Pour calculer les aires, on tape :
```
S0:=aire(cercle(point(-5,0),r))
```
On obtient :
```
pi*r^2
```
On tape :

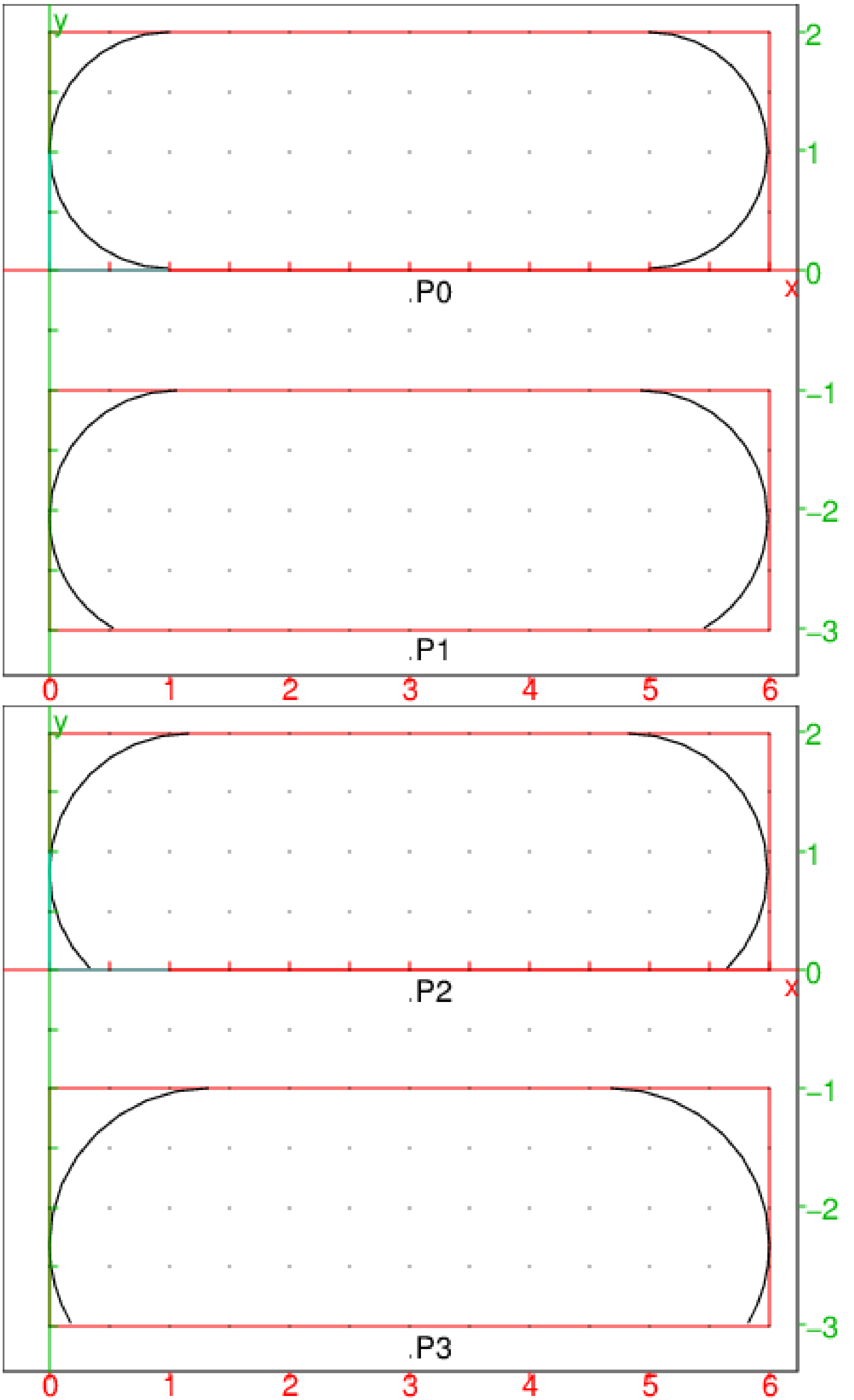
```
S1:=aire(cercle(-5/2,r,-pi/3,4*pi/3))+aire(triangle(
-5/2,-5/2+r*(-1/2-i*sqrt(3)/2),-5/2+r*(1/2-i*sqrt(3)/2)))
```
On obtient :
```
5*pi*r^2/6+(sqrt(3))/4*r^2
```
On tape :
```
S2:=aire(cercle(0,1,-pi/4,5*pi/4))+aire(triangle(
0,r*(-sqrt(2)/2*(1+i)),r*(sqrt(2)/2*(1-i))))
```
On obtient :
```
3*pi*r^2/4+1/2*r^2
```
On tape :
```
S3:=aire(cercle(5/2,r,-pi/6,7*pi/6))+aire(triangle(
5/2,5/2+r*(-sqrt(3)/2-i/2),5/2+r*(sqrt(3)/2-i/2)))
```
On obtient :
```
2*pi*r^2/3+(sqrt(3))/4*r^2
```

Calcul des différents rayons.
On tape :
```
r0:=normal(solve(a=2*r,r))
```
On obtient :
```
a/2
```
On tape :
```
r1:=op(normal(solve(a=r+r*sqrt(3)/2,r)))
```
On obtient :
```
(-2*sqrt(3)+4)*a
```
On tape :
```
r2:=op(normal(solve(a=r+r*sqrt(2)/2,r)))
```
On obtient :
```
(-(sqrt(2))+2)*a
```
On tape :
```
r3:=op(normal(solve(a=r+r/2,r)))
```
On obtient :
```
2*a/3
```
On tape :
```
A0:=evalf(subst(S0,r=r0))*a^2
```
On obtient :
```
0.785398163397*a^2
```
On tape :
```
A1:=evalf(subst(S1,r=r1))*a^2
```
On obtient :
```
0.876209667375*a^2
```
On tape :
```
evalf(subst(S2,r=r2))*a^2
```
On obtient :
```
A2:=0.980091001933*a^2
```
On tape :
```
A3:=evalf(factoriser(subst(S3,r=r3))*a^2)
```
On obtient :
```
1.12329235746*a^2
```

Donc :
$A_0 \simeq 0.785398163397a^2$
$A_1 \simeq 0.876209667375a^2$
$A_2 \simeq 0.980091001933a^2$
$A_3 \simeq 1.12329235746a^2$
Si $a = 3$ on a alors :
$A_0 \simeq 7.06858347057$
$A_1 \simeq 7.88588700637$
$A_2 \simeq 8.8208190174$
$A_3 \simeq 10.1096312171$
Le bassin C_0 est constitué de 2 demi-cercles de rayon 3/2 et d'un rectangle de côtés 1 et 3.
Donc son aire vaut :
$9\pi/4 + 3 \simeq A_0 + 3 \simeq 10.0685834706$
Le bassin C_1 est constitué de 2 demi-cercles de rayon :
$r_1 = 6(2 - \sqrt{3}) \simeq 1.60769515459$ et
d'un rectangle de côtés $4 - 2r_1 \simeq 0.784609690826$ et 3.
Donc son aire vaut :
$(5 * \pi/6 + \sqrt{3}/4) * r1^2 + 3 * (4 - 2 * r1) \simeq A_1 + 3 * 0.784609690826 \simeq 10.2397160788$
Le bassin C_2 est constitué de 2 demi-cercles de rayon :
$r_2 = 3(2 - \sqrt{2}) \simeq 1.75735931288$ et
d'un rectangle de côtés $4 - 2r_2 \simeq 0.485281374239$ et 3.
Donc son aire vaut :
$3\pi r_2^2/4 + r_2^2/2 + 3(4 - 2r_2) \simeq A_2 + 3 * 0.485281374239 \simeq 10.2766631401$
Le bassin C_3 est le même que B_3.
Donc son aire vaut : $2\pi/3 * 2^2 + \sqrt{3} \simeq 10.1096312171$
Dans ce cas le bassin le plus grand est C_2

La piscine

Monsieur X veut faire une piscine s'inscrivant dans un rectangle de largeur 2 unités et de longueur 6 unités mais il veut que les 2 bords les plus petits soient arrondis.
On lui propose les 4 solutions P_k ($k = 0, 1, 2, 3$) suivantes :
on coupe chaque bassin Bk ($k = 0, 1, 2, 3$) selon son axe de symétrie et on accole chacune des ces moitiés à un rectangle.
Voici les 4 propositons :



Dessiner ces 4 piscines avec `Xcas` et calculer l'aire de ces 4 piscines.
Est-ce que l'aire de la plus grande piscine correspond à l'aire du plus grand bassin ?

L'aire de la piscine P_k est égale à la somme de l'aire du bassin B_k et de l'aire du rectangle de largeur $a = 2$ et de longueur $3a - 2r_k = 2(3 - r_k)$. On tape :

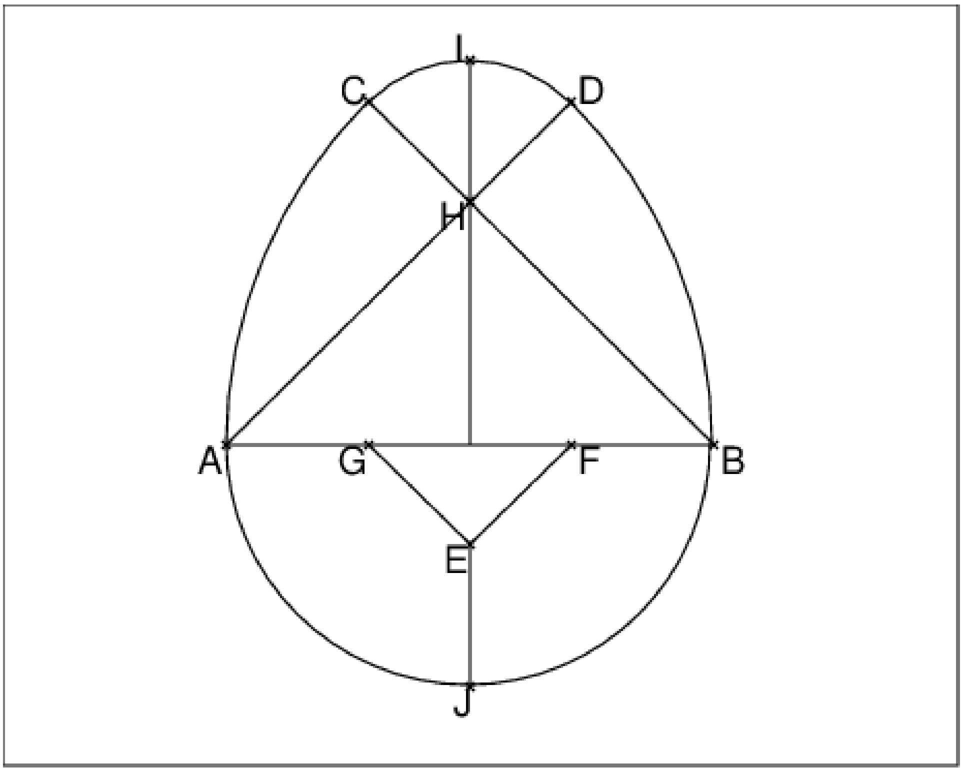
`a:=2`
On tape :
`evalf(A0+2*(6-2*r0))`
On obtient :
`11.1415926536`
On tape :
`evalf(A1+4*(3-r1))`
On obtient :
`11.2176515906`
On tape :
`evalf(A2+4*(3-r2))`
On obtient :
`11.2340725067`
On tape :
`evalf(A3+4*(3-r3))`
On obtient :
`11.1598360965`
P_2 est la plus grande piscine et elle correspond à l'aire du bassin B_2. En effet lorsque l'aire des bassins augmente, l'aire du rectangle intérieur diminue...donc on ne peut rien dire à priori.

12.2.4 Le puzzle de l'œuf

On construit un œuf que l'on partage en 9 morceaux : parmi ces 9 morceaux il y a 2 morceaux symétriques, 3 morceaux en 2 exemplaires et un morceau tout seul.
On tape :

```
r:=5;
A:=point(-r);
B:=point(r,affichage=quadrant4);
cercle(0,r,-pi,0);
I:=point(i*r*(3-sqrt(2)),affichage=quadrant2);
J:=point(-i*r);
H:=point(i*r);
cercle(B,2*r,3*pi/4,pi);;
C:=point(r+2*r*exp(3*i*pi/4),affichage=quadrant2);
cercle(A,2*r,0,pi/4);;
D:=point(-r+2*r*exp(i*pi/4),affichage=quadrant1);
cercle(H,r*(2-sqrt(2)),pi/4,3*pi/4);
E:=point(r*i*(1-sqrt(2)));
F:=point(-r*(1-sqrt(2)),affichage=quadrant4);
G:=point(r*(1-sqrt(2)));
segment(A,B);
segment(B,C);
segment(A,D);
segment(E,F);
segment(E,G);
segment(I,J);
```

On obtient :



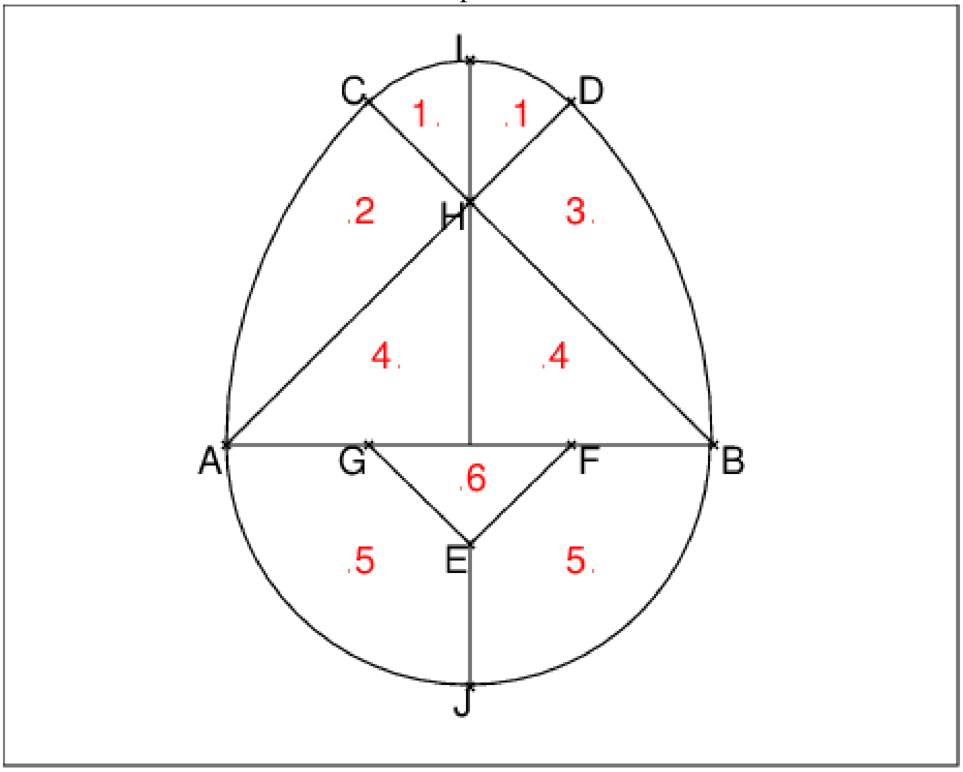
Cet œuf est formé par du demi-cercle inférieur de diamètre $AB = 10$ et de 3 arcs de cercle.
Soit HJ le diamètre perpendiculaire à AB ($HJ = AB$).
Les 3 arcs de cercle sont :

— l'arc CA est sur le cercle de centre B et de rayon AB et a comme angle au centre $\pi/4$
— l'arc BD est sur le cercle de centre A et de rayon AB et a comme angle au centre $\pi/4$,
— l'arc DC est sur le cercle de centre H et de rayon HD et a comme angle au centre $\pi/2$.

Le point E est sur HJ et $JE = HD$ Les points F et G sont sur AB et $EF = EG = EJ = HD$ On demande :

— Calculer HD.
— Calculer FG.
— Calculer AF et GB.
— Réaliser cette figure sur du carton et découper les pièces du puzzle.
— Chaque élève réalise avec ces pièces une figure ayant la forme d'un oiseau.
— Chaque élève représente avec `Xcas` son oiseau (en forme pleine) ainsi que la façon dont il a été fabriqué (on doit voir les 9 pièces qui le constitue).

Une solution On va numéroter ces pièces et les définir avec Xcas :



Pour cela on rajoute des légendes à la figure ci-dessus.

```
legende(0.7+6.6*i,1,rouge);
legende(-0.7+6.6*i,1,quadrant2,rouge);
legende(-2.5+4.6*i,2,rouge);
legende(2.5+4.6*i,3,quadrant2,rouge);
legende(-1.5+1.6*i,4,quadrant2,rouge);
legende(1.5+1.6*i,4,rouge);
legende(-2.5-2.6*i,5,rouge);
legende(2.5-2.6*i,5,quadrant2,rouge);
legende(-0.2-0.9*i,6,rouge);
```

Pour chaque pièce, on aura 4 paramètres a, r, t, c :
a donne la position de la pièce, r est le rayon de l'œuf, t est l'angle qui donne l'orientation de la pièce et c qui donne la couleur de la pièce.
Pour les piéce 1, 3, 5 qui contiennentt un arc de cercle AB (arc AB positif) a sera le centre O de cet arc et t sera l'angle que fait OA avec l'axe des x.
Pour la piéce 4 qui contiennentt un arc de cercle AB (arc AB positif) a sera le centre O de cet arc et $pi - t$ sera l'angle que fait OB avec l'axe des x.
Pour les pièces qui sont des triangles rectangles isocèle ABC direct ($AB = AC$), a sera l'affixe du sommet C et t sera l'angle que fait CA avec l'axe des x.
On tape :

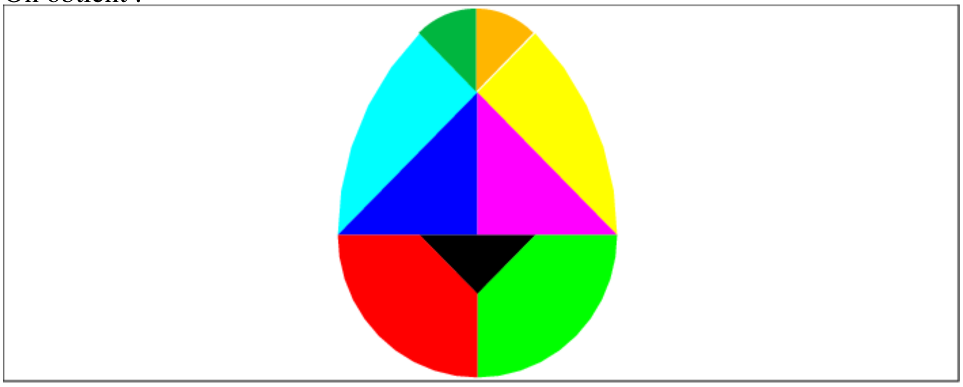
```
piece1(a,r,t,c):=affichage(cercle(a,r*(2-sqrt(2)),t,t+pi/4),rempli+c):;
piece3(a,r,t,c):={
local L,j;
```

```
L:=point(a+2*r*exp(i*t));
pour j de 1 jusque 5 faire
  L:=L,point(a+2*r*exp(i*j*pi/20.)*exp(i*t));
fpour;
L:=L,point(a+r*(1+i)*exp(i*t));
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece2(a,r,t,c):={
local L,j;
L:=point(a-2*r*exp(i*t));
pour j de -1 jusque -5 pas -1 faire
  L:=L,point(a+2*r*exp(i*pi+i*j*pi/20.)*exp(i*t));
fpour;
L:=L,point(a+r*(-1+i)*exp(i*t));
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece4(a,r,t,c):=triangle(a,a+r*exp(i*t),a+r*(1+i)*exp(i*t),
                          affichage=rempli+c):;
piece5(a,r,t,c):={
local L,j;
L:=point(a+r*exp(i*t));
pour j de 1 jusque 10 faire
  L:=L,a+r*exp(i*j*pi/20.)*exp(i*t);
fpour;
L:=L,a+r*(sqrt(2)-1)*i*exp(i*t),a+r*(sqrt(2)-1)*exp(i*t);
return affichage(polygone(L),rempli+c);
}:;
piece6(a,r,t,c):=triangle(a,a+r*(2-sqrt(2))*exp(i*t),a+r*(2-sqrt(2))*
```

On tape :

```
piece2(5,5,0,6);
piece3(-5,5,0,3);
piece1(5*i,5,pi/4,1);
piece1(5*i,5,pi/2,2);
piece4(-5,5,0,4);
piece4(5*i,5,-pi/2,5);
piece6(-5*(sqrt(2)-1),5,-pi/4,0);
piece5(0,5,-pi/2,2);
piece5(0,5,pi,1);
```

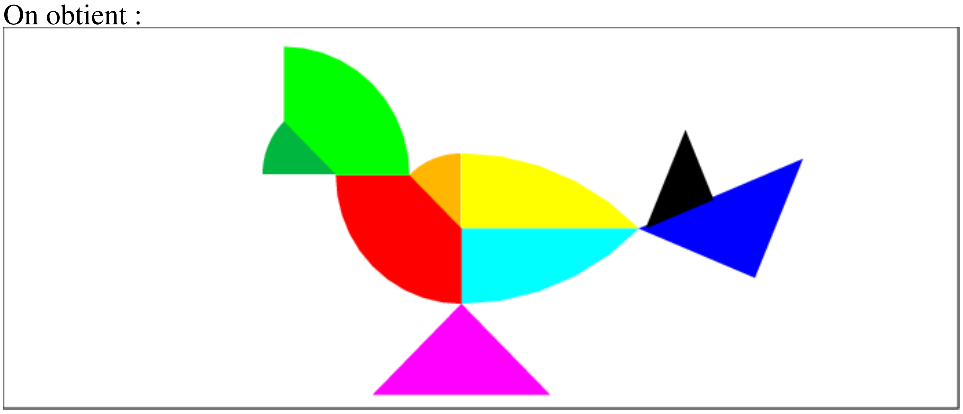
On obtient :



Voici 2 exemples d'oiseaux...

```
oiseau1(a,r):={
 local L;
L:= piece4(a,r,3*pi/4,5);
L:= L,piece3(r/sqrt(2)*(-1+i)+2*i*r*(2-sqrt(2))-2*r*i,r,pi/4,3);
L:= L,piece1(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2)),r,pi/2,93);
L:= L,piece2(r/sqrt(2)*(-1+i)+2*r*i,r,3*pi/4,6);
L:= L,piece5(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i,r,pi,1);
L:= L,piece5(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i-sqrt(2)*r,r,0,2);
L:= L,piece1(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i-r,r,3*pi/4,101);
L:= L,piece4(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2))+r*sqrt(2),r,-pi/8,4);
L:= L,piece6(r/sqrt(2)*(-1+i)+r*i*(2-sqrt(2))+3*r-
     r*sqrt(2)+i*i*(2-sqrt(2)),r,pi/8,0);
return L;
}:;
```

Puis :
`oiseau1(0,5)`
On obtient :



On tape :

```
oiseau2(a,r,b):={
  local L;
L:= piece4(a,r,3*pi/4,5);
L:=L,piece4(a+r*sqrt(2)/2*(-3+i),r,-pi/4,4);
```

```
L:=L,piece6(a+(3*sqrt(2)-4)/2*(-1+i)*r,r,pi/2,0);
L:=L,piece1(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2),r,-pi/2,101);
L:=L,piece2(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)-i*r*sqrt(2),r,-pi/4,6)
L:=L,piece5(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)+r*(sqrt(2)-1)/sqrt(2)*(-1+
r,-pi/4,2);
L:=L,piece1(a-(3*sqrt(2)-4)/2*r+i*r/sqrt(2)+(-1+i)*r*(1-1/sqrt(2))+
r*(1+i)/sqrt(2),r,-pi,93);
L:=L,piece5(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)+(sqrt(2)-1)*r,r,pi/2,1);
si b==0 alors
  L:=L,piece3(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)+r*(sqrt(2)-1)-i*r,r,pi/4,3)
sinon
   L:=L,piece3(a+r*(-1+i)*sqrt(2)/2+r*(1+i)-(1+i)*r,r,0,3);
fsi;
return(L);
}:;
```

Puis :

`oiseau2(0,3,1),oiseau2(15,5,0)`

On obtient :