Master 1 Mathématiques

Université J. Fourier
2008-2009

Propositions de TER, enseignant: D. Spehner

1. **Théorèmes de Shannon et théorie de l'information.**

   L'objectif de ce TER est la lecture du célèbre article de Shannon publié en 1948, qui contient deux théorèmes fondateurs de la théorie de l'information. Ce sujet s'adresse à des étudiants intéressés par les processus stochastiques.

   Références:
   C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27**, p. 379-423 et 623-656 (1948). Cet article peut être téléchargé sur :
   http://plan9.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/paper.html

2. **Principe des grandes déviations.**

   Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires de Bernoulli ($X_n = 0$ ou 1 avec probabilité $p_0 = p_1 = 1/2$) indépendantes. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et

   $$S_N = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} X_n \ .$$

   On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, Proba($S_N \in]1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon[$) $\to 1$ quand $N \to \infty$ (loi des grands nombres). Un calcul simple montre de plus que si $z > 1/2$, alors

   $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left(\mathrm{Proba}(S_N \geq z) \right) = -I(z)$$

   où $I(z)$ est la fonction convexe positive

   $$I(a) = \begin{cases} z\ln(2z) + (1-z)\ln(2-2z) & \text{si } z \in [0,1] \\ \infty & \text{si } z \notin [0,1]. \end{cases}$$

   Comme $I(z) > 0$ pour $z > 1/2$, ce résultat nous dit que l'évènement "S_N est plus grand que z", où z est choisi strictement plus grand que la valeur moyenne 1/2 de S_N, est exponentiellement rare quand $N \to \infty$. Dans le cas de variables aléatoires $X_n \in \mathbb{R}$ indépendantes identiquement distribuées de loi quelconque, le théorème de Cramér permet d'obtenir un résultat analogue et donne une formule générale pour la fonction convexe $I(z)$ (entropie). Le but de ce TER est d'apprendre quelques techniques probabilistes permettant d'analyser ces "événements rares".

   Références :
   - R. Durrett, *Probability: Theory and Examples, 2nd Ed.* (Wadsworth Publishing Company, USA, 1996), chapitre 1
   - R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1985), chapitres 1 et 2
   - A. Dembo et O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques* (Jones and Bartlett Publishers, London, 1993)