Master 1 "Mathématiques, Informatique" Université J. Fourier
2007-2008

Propositions de TER, enseignant: D. Spehner

1. **Théorèmes de Shannon et théorie de l'information.**

   L'objectif de ce TER est la lecture du célèbre article de Shannon publié en 1948, qui contient deux théorèmes fondateurs de la théorie de l'information. Ce sujet s'adresse de préférence à des étudiants n'ayant pas déjà suivi un cours sur le sujet et intéressés par les processus stochastiques.

   Références:
   C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27**, p. 379-423 et 623-656 (1948). Cet article peut être téléchargé sur :
   http://plan9.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/paper.html

2. **Principe des grandes déviations.**

   Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires de Bernoulli ($X_n = 0$ ou 1 avec probabilité $p_0 = p_1 = 1/2$) indépendantes. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et

$$S_N = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} X_n \ .$$

   On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, Proba$(S_N \in]1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon[) \to 1$ quand $N \to \infty$ (loi des grands nombres). Un calcul simple montre de plus que si $z > 1/2$, alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln\left(\mathrm{Proba}(S_N \geq z)\right) = -I(z)$$

   où $I(z)$ est la fonction convexe positive

$$I(a) = \begin{cases} z\ln(2z) + (1-z)\ln(2-2z) & \text{si } z \in [0,1] \\ \infty & \text{si } z \notin [0,1]. \end{cases}$$

   Comme $I(z) > 0$ pour $z > 1/2$, ce résultat nous dit que l'évènement "S_N est plus grand que z", où z est choisi strictement plus grand que la valeur moyenne 1/2 de S_N, est exponentiellement rare quand $N \to \infty$. Dans le cas de variables aléatoires $X_n \in \mathbb{R}$ indépendantes identiquement distribuées de loi quelconque, le théorème de Cramér permet d'obtenir un résultat analogue et donne une formule générale pour la fonction convexe $I(z)$ (entropie). Le but de ce TER est d'apprendre quelques techniques probabilistes permettant d'analyser ces "événements rares".

   Références :
   - R. Durrett, *Probability: Theory and Examples, 2nd Ed.* (Wadsworth Publishing Company, USA, 1996), chapitre 1
   - R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1985), chapitres 1 et 2
   - A. Dembo et O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques* (Jones and Bartlett Publishers, London, 1993)

3. **Fonctions presque périodiques.**

Les fonctions presque périodiques, introduites par H. Bohr en 1925-26, sont définies de la manière suivante : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue est presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+T)-f(t)| \leq \varepsilon$ pour une infinité de valeurs T telles que, pour un certain $l > 0$ fixé, chaque intervalle $[a, a+l] \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, contient au moins un tel T (en d'autres termes, les T "remplissent tout $\mathbb{R}$ sans laisser de trou arbitrairement grand"). Cette classe de fonctions est bien plus riche que (et contient) celle des fonctions continues périodiques. On montre les fonctions presque périodiques peuvent être approchées uniformément par des polynômes trigonométriques $\sum_{n=1}^{N} c_n \, e^{i\lambda_n t}$ ($c_n \in \mathbb{C}$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \cdots N$). L'objectif de ce TER est l'étude de ces fonctions et de leurs "séries de Fourier". On pourra de plus s'intéresser soit au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, avec des applications aux équations aux dérivées partielles, soit à la théorie des fonctions presque périodiques analytiques.

Références :
- C. Corduneanu, N. Gheorghiu et V. Barbu, *Almost periodic functions* (Interscience Publishers, New York, 1968)
- A.S. Besicovitch, *Almost periodic functions* (Cambridge University Press, 1954)
- L. Amerio et G. Prouse, *Almost periodic functions and Functional Equations* (van Nostrand Reinhold Company, Cincinnati, 1971)

4. **Théorème adiabatique.**

On considère l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\,\varepsilon \,\frac{d\psi_\varepsilon}{dt} = H(t)\,\psi_\varepsilon(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \,, \tag{1}$$

où la fonction inconnue $\psi_\varepsilon : t \in [0,1] \mapsto \psi_\varepsilon(t) \in \mathcal{H}$ est à valeur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $t \in [0,1] \mapsto H(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une fonction analytique à valeur opérateur telle que $H(t)$ est auto-adjoint pour tout t, et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre que l'on veut faire tendre vers zéro. Le théorème adiabatique nous dit que si $\lambda(t)$ est une valeur propre de $H(t)$ restant bien isolée du reste du spectre pour tout $t \in [0,1]$ et si $P(t)$ est le projecteur spectral associée, alors la solution de (1) avec la condition initiale $\psi_\varepsilon(0) \in P(0)\mathcal{H}$ satisfait $\psi_\varepsilon(1) \in P(1)\mathcal{H}$ dans la limite $\varepsilon \to 0$. Autrement dit, un vecteur propre initial de $H(0)$ évolue de manière à rester un vecteur propre de $H(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, à des termes petits en ε près. Le but de ce TER est de se familiariser avec diverses méthodes permettant de prouver ce résultat si utile en physique dans le cas $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ puis $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. Ces méthodes combinent l'analyse fonctionnelle avec l'analyse complexe.

Références:
- T. Kato, *On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics*, J. Phys. Soc. Japan **5** (1950), 435-439
- T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, 1980)
- A. Joye, *Geometrical and Mathematical Aspects of the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics*, thèse, EPFL Lausanne (1992), http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ joye