Master 1 “Mathématiques, Informatique” Université J. Fourier

2006-2007

Propositions de TER, enseignant: D. Spehner

1. **Équations linéaires intégrales et théorie de Fredholm.**

   Il s'agit d'un travail bibliographique s'appuyant sur et illustrant le cours d'analyse fonctionnelle (module MAT403). L'étudiant(e) devra dans un premier temps se familiariser avec la notion d'opérateur compact sur un espace de Banach. Il/elle étudiera ensuite la théorie de Fredholm pour les équations linéaires intégrales du type :

   $$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

   où $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues, λ est un paramètre complexe et x est la fonction inconnue.

   Références :
   - C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations* (Chelsea, New York, 1977)
   - M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol. 1* (Academic Press, San Diego, 1980)
   - R. Kress, *Linear integral equations* (Applied mathematical sciences, Springer, 1999)

2. **Théorème adiabatique.**

   On considère l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

   $$i\,\varepsilon\,\frac{d\psi_\varepsilon}{dt} = H(t)\,\psi_\varepsilon(t) \quad , \quad 0 \le t \le 1 \,, \tag{1}$$

   où la fonction inconnue $\psi_\varepsilon : t \in [0,1] \mapsto \psi_\varepsilon(t) \in \mathcal{H}$ est à valeur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $t \in [0,1] \mapsto H(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une fonction analytique à valeur opérateur telle que $H(t)$ est auto-adjoint pour tout t, et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre que l'on veut faire tendre vers zéro. Le théorème adiabatique nous dit que si $\lambda(t)$ est une valeur propre de $H(t)$ restant bien isolée du reste du spectre pour tout $t \in [0,1]$ et si $P(t)$ est le projecteur spectral associée, alors la solution de (1) avec la condition initiale $\psi_\varepsilon(0) \in P(0)\mathcal{H}$ satisfait $\psi_\varepsilon(1) \in P(1)\mathcal{H}$ dans la limite $\varepsilon \to 0$. Autrement dit, un vecteur propre initial de $H(0)$ évolue de manière à rester un vecteur propre de $H(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, à des termes petits en ε près. Le but de ce TER est de se familiariser avec diverses méthodes permettant de prouver ce résultat si utile en physique dans le cas $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ puis $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. Ces méthodes combinent l'analyse fonctionnelle avec l'analyse complexe.

   Références:
   - T. Kato, *On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics*, J. Phys. Soc. Japan **5** (1950), 435-439
   - T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, 1980)
   - A. Joye, *Geometrical and Mathematical Aspects of the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics*, thèse, EPFL Lausanne (1992), http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ joye