Master 1 “Mathématiques, Informatique” | Université J. Fourier
2005-2006

**Propositions de TER, enseignant: D. Spehner**

1. **Équations linéaires intégrales et théorie de Fredholm.**

   Il s’agit d’un travail bibliographique s’appuyant sur et illustrant le cours d’analyse fonctionnelle (module MAT403). L’étudiant devra dans un premier temps se familiariser avec la notion d’opérateur compact sur un espace de Banach. Il étudiera ensuite la théorie de Fredholm pour les équations linéaires intégrales du type :

   $$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

   où $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues, $\lambda$ est un paramètre complexe et $x$ est la fonction inconnue.

   Références :
   - H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications* (Masson, Paris, 1983)
   - M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol. 1* (Academic Press, San Diego, 1980)
   - C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations* (Chelsea, New York, 1977)

2. **Théorie de la percolation.**

   Considérons l’ensemble $\mathbb{L}^d = \{e = (x,y)\,;\, x,y \in \mathbb{Z}^d, |x-y| = 1\}$ des ”liens” reliant tous les points de $\mathbb{Z}^d$ séparés par une distance euclidienne égale à 1. Chaque lien $e$ est déclaré “ouvert” avec probabilité $p$ et “fermé” sinon (avec $0 < p < 1$ fixé), indépendamment des autres liens. La théorie de la percolation s’intéresse à la caractérisation des chemins constitués par des liens ouverts qui relient un point $x \in \mathbb{Z}^d$ fixé à l’extrémité d’un cube contenant $x$. Il s’agit au départ d’un modèle probabiliste décrivant la pénétration de l’eau dans un milieu poreux. Une pierre de ce matériau est décrite par un ensemble de liens dans $\mathbb{L}^3$. Un lien est ouvert s’il laisse passer l’eau et fermé sinon. On veut par exemple connaître la probabilité que le centre de la pierre soit mouillé quand celle-ci est immergée dans l’eau. Le but de ce TER est de se familiariser avec quelques résultats simples sur la percolation en dimension $d = 2$ et de passer en revue quelques applications. Si l’étudiant le désire, il pourra compléter son travail bibliographique par des simulations numériques.

   Références:
   - G. Grimmett, Percolation (Springer-Verlag, Berlin, 1999)
   - D. Stauffer, A. Aharony, Introduction to Percolation Theory (Taylor and Francis, London, 1994)