Licence 3, option "Ouverture aux mathématiques" Université Stendhal
2010-2011

Feuille d'exercices : arithmétique dans l'ensemble des entiers naturels

Exercice 1.
Un enfant place ses billes par rangées de 6; il lui en reste 3. Il les place ensuite par rangées de 5; il n'en reste pas.

1. Si l'enfant place ses billes par rangées de 3, va t'il lui en rester ?
2. Quel est le nombre de billes que possède l'enfant, sachant que ce nombre est inférieur à 30 ?

Exercice 2.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 903 par 37.

Exercice 3. *(Concours P.E., Grenoble, Lyon, 2000)*
On s'intéresse au quotient q et au reste r de la division de 40626 par 12. Voici quatre résultats, tous erronés :

- 1er résultat $q = 348$, $r = 8$;
- 2nd résultat $q = 3384$, $r = 18$;
- 3ième résultat $q = 3382$, $r = 6$;
- 4ième résultat $q = 3383$, $r = 0$.

Sans s'appuyer sur le calcul effectif du quotient et du reste, expliquez pourquoi ces résultats ne sont pas corrects. Pour cela, vous utiliserez des arguments de natures différentes pour chacun des résultats.

Exercice 4.
Le 1er janvier 1789 est un jeudi. Quel jour de la semaine a eu lieu la prise de la Bastille ? Justifier votre réponse.

Exercice 5. *(Concours P.E., Amiens, 2001)*
Dans un jeu, une cagnotte d'un montant inférieur à 4000 euros, exprimé par un nombre entier, est partagée entre les gagnants. Chacun reçoit 129 euros. Il reste dans la cagnotte 28 euros. Quel est le montant maximal de la cagnotte ?

Exercice 6.
Décomposer 120 en facteurs premiers. En déduire la liste de tous les diviseurs de 120.

Exercice 7.
On veut paver une cour rectangulaire de dimensions 42×98 dm^2 avec des dalles carrées identiques, de dimensions $(m \times m)$ dm^2, où m est un entier. Déterminer toutes les valeurs de m possibles.
Même question pour une cour rectangulaire de dimensions 42×97 dm^2.

Exercice 8. *(Concours P.E., Lyon Grenoble, 2002)*
Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles. Si l'on compte les bouteilles par 3, 5 ou 7, il en reste toujours 2. Sachant que le nombre de bouteilles est compris entre 1500 et 1600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

Exercice 9. *(Concours P.E., Amiens, 2007)*

On justifiera toutes les réponses

1. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 207 ? Si oui, lesquels ?
2. Mêmes questions pour 329.
3. Caractériser les entiers qui sont la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs.
4. Déterminer toutes les valeurs possibles du chiffre d, $0 \leq d \leq 9$, pour que le nombre qui s'écrit $47d5$ en base 10 soit la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs.

Exercice 10. *(concours P.E., Nancy, 2002)*

Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

N est divisible par 6 ; N n'est pas divisible par 8 ; N a exactement 15 diviseurs.

Indication : on rappelle que si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \cdots$, alors le nombre de ses diviseurs est $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots$.

Exercice 11. *(concours P.E., Groupement 6, 2009)*

1. Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 de 1, de 10 et de 100. Écrire les trois égalités caractéristiques correspondantes.
2. En utilisant l'égalité $10^3 = 10 \times 10^2$, montrer que le reste de la division euclidienne de 10^3 par 7 se déduit, sans poser de divisions, des résultats précédents.
3. Soient r_n le reste de la division euclidienne de 10^n par 7 et r_{n+1} le reste de la division euclidienne de 10^{n+1} par 7. Donner une méthode permettant d'obtenir r_{n+1} à partir de r_n.
4. Compléter la deuxième ligne du tableau ci-dessous :

$\mathbf{10^n}$:	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\mathbf{r_n}$:										

5. Déterminer à l'aide du tableau de la question 4 si 6000000006 est divisible par 7 (indiquer les étapes de votre raisonnement).

Exercice 12. *(Identité de Bézout)*

On dispose de deux sauts ayant respectivement des contenances de n litres et de m litres, où n et m sont des entiers connus, et d'un évier permettant de remplir ou de vider l'eau des sauts autant de fois qu'on le désire. On voudrait remplir une bassine (de contenance inconnue supposée très grande) par exactement un litre d'eau. On supposera qu'il est impossible de tracer des marques formant une graduation à l'intérieur des sauts, de sorte que l'on ne peut pas mesurer de manière suffisamment précise une fraction du contenu d'un saut.

1. Si $n = 2$ et $m = 5$, comment feriez-vous pour remplir la bassine par exactement un litre d'eau ?
2. Même question pour $n = 2$ et $m = 4$.
3. Prenez d'autres valeurs entières pour n et m (différentes de 1); dans chaque cas, trouver une méthode, s'il y en a une, pour obtenir le résultat souhaité, ou bien expliquer le cas échéant pourquoi cette tâche vous paraît impossible.
4. Essayez de généraliser vos résultats au cas de deux entiers naturels n et m quelconques. Discutez les valeurs de n et m pour lesquelles votre méthode ne marche pas. Pour ces valeurs, quel pourrait être le plus petit entier $k > 1$ tel que l'on puisse remplir la bassine par exactement k litres d'eau en utilisant uniquement les deux sauts ?