Feuille d'exercices 5 : chaînes de Markov

Notations : Dans ce qui suit, E désigne toujours un ensemble dénombrable. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi initiale m à valeurs dans E, on note $\mathbb{P}_m$ sa loi (probabilité sur $E^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu de toutes ses parties) et $\mathbb{P}_x$ la loi correspondante obtenue en prenant $m = \delta_x$. On écrit :

$$q(y|x) = \mathbb{P}_m\big[X_{n+1} = y \big| X_n = x\big] = \mathbb{P}_x\big[X_1 = y\big] \quad , \quad (x,y) \in E^2 \qquad \text{(noyau de transition)}$$

et $q = (q_{x,y})_{(x,y)\in E^2}$ est la matrice de transition (éventuellement infinie), d'éléments $q_{x,y} = q(y|x)$.

Exercice 1. *Simulation d'une chaîne de Markov d'espace d'états fini.*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est définie une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Étant donné une mesure m sur $E = \{1, 2, \cdots, N\}$ et q une matrice de transition sur E, on considère la variable aléatoire $X_0 = g(U_0)$ à valeurs dans E, où la fonction $g : [0,1[\to E$ est définie par :

$$g(u) = j \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=1}^{j-1} m(k) \le u < \sum_{k=1}^{j} m(k) \ .$$

De même, on définit récursivement les variables aléatoires $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$ à valeurs dans E, où la fonction $f : E \times [0,1[\to E$ est donnée par :

$$f(i,u) = j \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=1}^{j-1} q(k|i) \le u < \sum_{k=1}^{j} q(k|i) \ .$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi initiale m et de matrice de transition q.

Exercice 2. *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire partant de 0 de loi μ sur un sous-groupe dénombrable E de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et donner sa loi initiale m et sa matrice de transition q en fonction de μ.
   Vérifier que q est invariante par translation (c'est-à-dire, $q(s+t|r+t) = q(s|r) \ \ \forall\, (r,s,t) \in E^3$).
2. On suppose que $E = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que la loi de $X_n = S_n - S_{n-1}$ est donnée par $\mu(X_n = [+1]) = \mu(X_n = [-1]) = 1/2$ et $\mu(X_n = [0]) = 0$, où $[1]$, $[-1]$ et $[0]$ désignent respectivement les classes d'équivalence modulo 3 de 1, -1 et 0.
   (a) Écrire la matrice de transition q de la chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique loi stationnaire m que l'on calculera.
   (c) Calculer les lois de S_n pour $n = 1, 2, \ldots, 6$.
   Montrer que ces lois tendent vers la loi stationnaire m déterminée dans la question (b) quand n tend vers l'infini. Quelle est la vitesse de convergence ?

Exercice 3. *Chaînes de Markov d'ordre k.*
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on dit qu'un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est une *chaîne de Markov d'ordre k* si les vecteurs aléatoires $X_{k,n} = (X_n, \ldots, X_{n+k-1})$ définissent une chaîne de Markov $(X_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E^k. Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'ordre k si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x_0, \cdots, x_{n+k}) \in E^{n+k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_{n+k} = x_{n+k} | X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, \ldots, X_0 = x_0] \\
&\qquad = \mathbb{P}[X_{n+k} = x_{n+k} | X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, \ldots, X_n = x_n] \\
&\qquad = q_k(x_{n+k} | x_{n+k-1}, \ldots, x_n) \ ,
\end{aligned}$$

où $q_k(\cdot|\cdot) : E \times E^k \to [0,1]$ est indépendant de n.
En déduire que toute chaîne de Markov est une chaîne de Markov d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 4. *Transformation d'une chaîne de Markov.*
Soit $a, b, c \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ de loi initiale uniforme sur E et de matrice de transition

$$q = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ b & 0 & 1-b \\ c & 1-c & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit f la fonction de E dans l'ensemble à deux éléments $\{A, B\}$ définie par $f(1) = A$ et$f(2) = f(3) = B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $Y_n = f(X_n)$.

1. Montrer que le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si et seulement si $b = c$. On précisera dans ce cas sa loi initiale et sa matrice de transition.

2. Montrer que si $b \neq c$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov d'ordre k, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 5. *Chaîne de Markov arrêtée.*
Soit $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition q. Pour tout $A \subset E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_A = \inf\{m \in \mathbb{N} \; ; \; X_m \in A\} \qquad \text{et} \qquad Y_n = X_{n\wedge T_A} = X_{\inf\{n, T_A\}} .$$

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on déterminera la matrice de transition.

Exercice 6. *Chaînes de Markov réversibles.*
Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E de matrice de transition q est dite *réversible* s'il existe une mesure σ-finie non triviale m telle que

$$q(y|x)m(x) = q(x|y)m(y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in E^2. \tag{1}$$

1. Montrer que la mesure m vérifiant (1) est une mesure invariante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On suppose que (1) est vérifié pour une mesure de probabilité m. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x_0, \ldots, x_n) \in E^{n+1}$, on a

$$\mathbb{P}_m\big[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\big] = \mathbb{P}_m\big[X_0 = x_n, X_1 = x_{n-1}, \ldots, X_n = x_0\big]$$

Exercice 7. On reprend les notations de l'exercice 5.

1. Soit $f(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty]$. Montrer que f satisfait $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ (qf)(x) & \text{si } x \notin A . \end{cases}$

   Montrer que $f(Y_n)$ est une martingale.

2. Soit A et B deux parties disjointes de E et $h(x) = \mathbb{P}_x[T_A < T_B]$. Montrer que h vérifie :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in B \\ (qh)(x) & \text{si } x \notin A \cup B . \end{cases} \tag{2}$$

3. On suppose que C est une partie de E telle que $E \setminus C$ est finie et $\mathbb{P}_x[T_C < +\infty] > 0$ pour tout $x \in E \setminus C$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier positif N tel que $\sup_{x\in E\setminus C} \mathbb{P}_x[T_C > N] < 1$.

   Pour un tel entier, on pose $\varepsilon = 1 - \sup_{x\in E\setminus C} \mathbb{P}_x[T_C > N]$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}_x[T_C > kN] \leq (1-\varepsilon)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in E \setminus C$.
En déduire que $\mathbb{P}_x[T_C < \infty] = 1$ pour tout $x \in E \setminus C$.

4. On suppose que A et B sont deux parties disjointes de E telles que $E \setminus (A \cup B)$ est finie et $\mathbb{P}_x[T_{A\cup B} < \infty] > 0$ pour tout $x \in E \setminus (A \cup B)$. Soit $h(x) = \mathbb{P}_x[T_A < T_B]$. On a vu que h est solution de (2).

   (a) Soit g une application de E dans $\mathbb{R}$ bornée vérifiant $h(x) = (qh)(x)$ pour tout $x \notin A \cup B$.
   Montrer que $(h(X_{n\wedge T_{A\cup B}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

   (b) Montrer que h est l'unique solution de (2).