Feuille d'exercices 4 : martingales

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration de $\mathcal{F}$ et si $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables et telles que $\|f\|_{L^p}^p = \int |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \infty$.
Si x et y sont des réels (ou bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$), on note $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{F}_m$ un événement de probabilité $\mathbb{P}[A] > 0$. On note $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}[\cdot|A]$ la probabilité conditionnelle sachant A. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale (respectivement une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-sous-martingale, une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-surmartingale) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $\widetilde{M}_n = M_{n+m}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\widetilde{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$-martingale (respectivement une $(\mathcal{F}_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$-sous-martingale, une $(\mathcal{F}_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$-surmartingale) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_A)$.

Exercice 2. *Principe de superposition.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des $(\mathcal{F}_n)$-surmartingales et T un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les variables aléatoires

$$M_n = X_n \, 1_{\{T>n\}} + Y_n \, 1_{\{T\leq n\}} \; .$$

Montrer que si $X_T \geq Y_T$ presque sûrement, alors $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-surmartingale.

Exercice 3. *Martingales et temps d'arrêts bornés.* Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

(2) M_n est intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication pour (2) $\Rightarrow$ (1) : considérer $T_{m,A} = (m+1)1_A + m\, 1_{\Omega\setminus A}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}_m$.

Exercice 4. *Inégalité L^p sur le maximum.* Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)$-sous-martingale positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n^* = \max\{M_0, \ldots, M_n\}$. Soit p un réel, $p > 1$.

1. En utilisant l'inégalité de Doob $\lambda\mathbb{P}[M_n^* \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[1_{M_n^*\geq\lambda}\, M_n]$ établie en cours et l'égalité $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \mathbb{P}[X \geq \lambda]$, où X est une variable aléatoire positive (cf. exercice 6, feuille de TD 0), montrer que pour tout réel $a > 0$,
$$\big\|M_n^* \wedge a\big\|_{L^p}^p \leq \frac{p}{p-1}\, \mathbb{E}\big[M_n \big(M_n^* \wedge a\big)^{p-1}\big] \; .$$
2. En déduire que si $M_n \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, alors $M_n^* \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ et
$$\big\|M_n^*\big\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \big\|M_n\big\|_{L^p} \; .$$

Exercice 5. *Convergence L^2 et presque sûre des martingales bornées dans L^2.*
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)$-martingale bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (c'est-à-dire $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_{L^2} < \infty$).

1. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ vers une variable aléatoire M_∞ et que $M_n = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Indication : Utiliser $\mathbb{E}[M_n^2] = \displaystyle\sum_{k=0}^n \mathbb{E}[\Delta_k^2]$ avec $\Delta_0 = M_0$ et $\Delta_k = M_k - M_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
2. En utilisant le résultat de l'exercice 4, démontrer l'inégalité :
$$\Big\| \sup_{m\geq n} |M_m - M_n| \Big\|_{L^2}^2 \leq 4\Big(\big\|M_\infty^2\big\|_{L^2}^2 - \big\|M_n^2\big\|_{L^2}^2\Big) \; .$$

3. En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers M_∞.

Exercice 6. *L'urne de Polya.*
Une urne contient initialement deux boules : une blanche et une noire. On effectue des tirages successifs en remettant dans l'urne après chaque tirage la boule tirée, ainsi qu'une boule de même couleur. Ainsi, il y a $n+1$ boules dans l'urne avant le n-ième tirage. À chaque tirage, la boule tirée est choisie de façon équipropable parmi les boules se trouvant dans l'urne. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, soit S_n le nombre et $M_n = S_n/(n+1)$ la proportion de boules noires présentes dans l'urne avant le n-ième tirage. Soit X_{n+1} la variable aléatoire valant 1 si la n-ième boule tirée est noire et 0 sinon. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 2}$, avec la convention $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Exprimer S_n en fonction de $X_2, \ldots, X_n$.
2. Déterminer l'espérance conditionnelle de X_{n+1} par rapport à $\mathcal{F}_n$. En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ un entier fixé. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par
$$Z_n = \frac{S_n(S_n+1)\ldots(S_n+k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
4. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire Z_∞. Que vaut $\mathbb{E}[Z_\infty]$?

   Le cas particulier $k=1$ montre que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable M_∞.
5. Exprimer Z_∞ à l'aide de M_∞ et en déduire que $\mathbb{E}[M_\infty^k] = 1/(k+1)$.
6. En déduire que M_∞ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

   Indication : toute application continue $[0,1] \to \mathbb{R}$ est une limite uniforme de polynômes.
7. Retrouver ce résultat en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la variable aléatoire S_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 7. *Jeu du "rouge maintenant".*
On cherche la meilleure stratégie pour jouer au jeu suivant avec un jeu de 52 cartes. Le tas de cartes bien mélangées est posé face cachée sur la table et le joueur retourne les cartes les unes après les autres. Au moment qu'il choisit, il dit "rouge". Il gagne si la carte qu'il retourne juste après est rouge. Montrer qu'il n'existe pas de stratégie offrant une probabilité de gagner différente de $R_0/52$, où R_0 est le nombre de cartes rouges dans le tas initial.
Indication : on montrera que $(R_n/(52-n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, où R_n est le nombre de cartes rouges restant dans le tas après avoir retourné n cartes.

Exercice 8. *Identités de Wald.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit T un temps d'arrêt intégrable de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1. Démontrer l'identité de Wald vue en cours en utilisant le théorème d'arrêt (on commencera par traiter le cas T borné, puis T intégrable et $X_k \geq 0$, puis le cas général).
2. On suppose à présent que X_n est centrée et de carré intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) En utilisant la martingale $(S_n^2 - n\,\mathbb{E}[X_1^2])_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2] = \mathbb{E}[X_1^2]\,\mathbb{E}[n\wedge T]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(S_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)$-martingale bornée dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   (b) En déduire grâce au résultat de l'exercice 5 que $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[X_1^2]\,\mathbb{E}[T]$.