Feuille d'exercices 3 : processus à temps discret

Exercice 1. *Loi géométrique et fonction génératrice.* Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi géométrique de paramètre $s \in [0,1[$ si $\mathbb{P}[T \geq n] = s^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou encore si $\mathbb{P}[T = n] = (1-s)s^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice g_X de X vérifie $g_X(s) = \mathbb{P}[T \geq X]$, où T est une variable aléatoire indépendante de X suivant la loi géométrique de paramètre s.
2. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T est une variable aléatoire indépendante de (X,Y) suivant la loi géométrique de paramètre s, alors
$$\mathbb{P}[T \geq X+Y \mid T \geq X] = \mathbb{P}[T \geq Y] .$$

Exercice 2. *Marche aléatoire simple sur* $\mathbb{Z}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ partant de l'origine $z = 0$. On note $p = \mathbb{P}[S_{n+1} - S_n = 1]$ la probabilité que le marcheur saute vers la droite et $q = 1 - p = \mathbb{P}[S_{n+1} - S_n = -1]$ la probabilité qu'il saute vers la gauche au temps n.

1. Déterminer les lois et les espérances (si elles existent) des temps d'atteinte de $z = \pm 1$, définis par :
$$T_{\pm 1} = \inf\bigl\{n \in \mathbb{N} \; ; \; S_n = \pm 1\bigr\} .$$
2. Même question pour le temps de retour en $z = 0$,
$$R_0 = \inf\bigl\{n \in \mathbb{N}^\star \; ; \; S_n = 0\bigr\} .$$
3. Soit $S^* = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$ et $S_* = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Déterminer les lois de S^* et de S_*. Montrer que pour une marche aléatoire symétrique ($p = 1/2$),
$$\mathbb{P}[S_* = -\infty, S^* = \infty] = 1$$
et pour une marche aléatoire asymétrique,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_* > -\infty, S^* = \infty] = 1 \qquad & \text{si } \; p > 1/2 \\ \mathbb{P}[S_* = -\infty, S_* < \infty] = 1 \qquad & \text{si } \; p < 1/2. \end{aligned}$$
(on pourra se servir des résultats démontrés en cours).

Exercice 3. *Propriétés de Markov des marches aléatoires.* Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ de loi μ. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on pose $S_n^{(m)} = S_{m+n} - S_m$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $(S_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ de loi μ, indépendante de $(S_1, \dots, S_m)$.
2. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle associée à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et T un temps d'arrêt presque sûrement fini sur $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(S_n^{(T)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ de loi μ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n^{(T)}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_\infty$ des événements antérieurs à T.

Exercice 4. *Population totale d'un processus de Galton-Watson.* Soit $(X_n^{(i)})_{(i,n)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires entières positives indépendantes et de même loi. Soit k un entier, $k \geq 1$. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ par $Z_0 = k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_n^{(i)} .$$

Si $X_n^{(i)}$ représente le nombre d'enfants de l'individu numéro i au sein de la génération numéro n (si cet individu existe), Z_n n'est autre que le nombre total d'individus de cette génération, sachant que la population initiale comporte k individus. On s'intéresse à la taille totale de la population, c'est-à-dire à la variable aléatoire

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n .$$

On note respectivement $m = \mathbb{E}[X_n^{(i)}]$ et g l'espérance et la fonction génératrice communes des $X_n^{(i)}$.

1. Soit $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^\star \ ; \ Z_n = 0\}$ l'instant d'extinction de la population ($T \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$). Montrer que Y est finie si et seulement si T est fini.
2. Exprimer l'espérance de Y en fonction de m et de k. Examiner en particulier le cas $m = 1$.
3. On aimerait préciser la loi de Y en déterminant sa fonction génératrice $h(s) = \mathbb{E}[s^Y]$, $s \in [0, 1[$. On suppose que $\mathbb{P}[X_n^{(i)} = 0] > 0$ et que $k = 1$. Montrer, en conditionnant par rapport à la taille Z_1 de la génération à l'instant $n = 1$, que pour tout s dans $[0, 1[$, $h(s)$ est solution de l'équation
$$h(s) = sg(h(s)) . \tag{1}$$
4. Montrer que si $s \in [0, 1[$, l'équation $u = sg(u)$ admet une unique solution $u = h(s)$ dans $[0, 1[$.
5. Expliciter la solution $h(s)$ de (1) dans le cas où $\mathbb{P}[X_n^{(i)} = 0] = \mathbb{P}[X_n^{(i)} = 2] = \frac{1}{2}$.
En déduire dans ce cas la loi de Y.

Exercice 5. *Majoration de l'espérance du temps d'extinction d'un processus de Galton-Watson.* On garde les notations de l'exercice précédent. On suppose que $m < 1$ et $Z_0 = k = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[Z_n > 0]$.
2. En déduire que $\mathbb{E}[T] \leq 1/(1 - m)$.

Exercice 6. *Un exemple de temps d'arrêt.* Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^\star)$ (tribu de toutes les parties de $\mathbb{N}^\star$) et $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \zeta(3)^{-1}\omega^{-3}$ pour tout $\omega \in \mathbb{N}^\star$ (avec $\zeta(3) = \sum_{k\in\mathbb{N}^\star} k^{-3}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la variable aléatoire S_n définie par :

$$S_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & \text{si } \omega = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les tribus $\mathcal{F}_n$ engendrées par $(S_1, \cdots, S_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que la variable aléatoire $T : \omega \in \mathbb{N}^\star \mapsto \omega$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. Montrer que les variables aléatoires S_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, et T sont intégrables, que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[S_n] < \infty$, mais que la variable aléatoire S_T n'est pas intégrable.

Exercice 7. *Simulation d'une variable aléatoire discrète à partir d'un jeu de pile ou face.* On dispose d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On souhaite simuler à partir de cette suite une variable aléatoire discrète Y de loi donnée μ. Autrement dit, on cherche une fonction f qui à un résultat $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ du jeu de pile ou face associe une valeur $f(x)$ telle que la variable aléatoire $Y = f(X)$ suive la loi μ. On aimerait que $f(x)$ ne dépende que d'un nombre fini de x_n, autrement dit, qu'il existe un temps d'arrêt presque sûrement fini T de la filtration $\mathcal{F}^X$ tel que Y soit $\mathcal{F}_T^X$-mesurable. Le but de l'exercice est de montrer que l'espérance d'un tel temps d'arrêt est supérieure ou égale à l'*entropie* de la loi μ de Y, définie par :

$$H(Y) = -\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mu(\{y\}) \log_2 \mu(\{y\})\,,$$

où $\mathcal{Y}$ est un ensemble dénombrable dans lequel la variable aléatoire discrète Y prend ses valeurs. On remarquera que $H(Y)$ est positive et ne dépend pas des valeurs $y \in \mathcal{Y}$ prises par Y, mais seulement des probabilités $\mu(\{y\})$.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire discrète W et toute fonction f définie sur l'ensemble des valeurs de W, on a $H(f(W)) \leq H(W)$.

2. Soit $C = \{(x_k)_{1\leq k\leq n} \in \{0,1\}^n \ ;\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ l'ensemble des suites finies (un élément de C sera appelé un *mot*). Montrer que C est dénombrable.

3. À tout temps d'arrêt presque sûrement fini T de la filtration $\mathcal{F}^X$, on associe la variable aléatoire $W_T = (X_1, X_2, \ldots, X_T)$ à valeurs dans C. On appelle *code* associé au temps d'arrêt T l'ensemble C_T des mots w dans C qui vérifient $\mathbb{P}[W_T = w] > 0$. Montrer que C_T possède la propriété du préfixe, c'est-à-dire qu'aucun mot de C_T n'est le début d'un autre mot de C_T.

4. Montrer que $H(W_T) = \mathbb{E}[T]$.

5. Montrer qu'une variable aléatoire Z est $\mathcal{F}_T^X$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Z = f(X_1, \ldots, X_T)$.

6. En déduire le résultat demandé : si T est un temps d'arrêt presque sûrement fini de la filtration $\mathcal{F}^X$ et Y est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T^X$-mesurable, alors $\mathbb{E}[T] \geq H(Y)$.