Feuille d'exercices 1 : espérances conditionnelles

Exercice 1. *Probabilités conditionnelles (1).* On effectue un test de dépistage d'une maladie sur une population de N personnes, dont une seule est malade. Le test a une probabilité p de donner un résultat faux, la validité de ce résultat étant indépendante de l'état de la personne (malade ou saine). Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une personne soit malade, sachant que le test sur cette personne est positif ?

Exercice 2. *Probabilités conditionnelles (2).* Une urne contient une boule rouge, une boule bleue et une boule verte. On effectue n tirages avec remise. Soit N_i le nombre total de boules tirées de couleur $i = R, B, V$ (rouge, bleu, vert). Soit $X_k \in \{R, B, V\}$ la couleur de la boule obtenue au k-ième tirage.

1. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[X_k = i|(N_R, N_B) = (n_R, n_B)]$, avec $i \in \{R, B, V\}$ et $(n_R, n_B) \in \mathbb{N}^2$, $n_R + n_B \leq n$.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[X_k = i|N_R + N_B = m]$, avec $i \in \{R, B, V\}$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

Exercice 3. *Variables aléatoires de Poisson.* Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ fixé et $P_1, \cdots, P_m$ des variables aléatoires entières indépendantes distribuées selon les lois de Poisson de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

1. Quelle est la distribution de la variable aléatoire $S = P_1 + \cdots + P_m$?
2. Soit $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ et de n
$$\mathbb{E}[P_i|S = n] = \frac{\mathbb{E}[P_i \, 1_{S=n}]}{\mathbb{P}[S = n]} .$$
3. Soit $\sigma(S)$ la tribu engendrée par les événements $\{S = n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Donner $\mathbb{E}[P_i|\sigma(S)]$.

Exercice 4. *Sommes aléatoires d'entiers.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi de carrés intégrables sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$. On suppose que $\mathrm{cov}(X_n, X_m) = \mathbb{E}[X_n X_m] - \mu^2 = \gamma$ est indépendant de (n, m) si $n \neq m$. Soit P une variable aléatoire *indépendante de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, distribuée selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit pour tout $\omega \in \Omega$:
$$S(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{P(\omega)} X_n(\omega) & \text{si } P(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{si } P(\omega) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. (a) Déterminer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[S|\sigma(P)]$ et $\mathbb{E}[S^2|\sigma(P)]$, où $\sigma(P) \subset \mathcal{F}$ est la sous-tribu engendrée par les événements $\{P = p\}$, $p \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{var}(S)$.
3. On suppose maintenant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même loi [1], qui sont toujours indépendantes de P. Soit $T = P - S$.

[1] Autrement dit, il existe $0 \leq q \leq 1$ tel que $\mathbb{P}[X_n = 0] = q$ et $\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $\mathbb{E}[u^S v^T|\sigma(P)]$ pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$.

(b) En déduire la loi du couple (S,T) et les lois de S et T. Montrer que les variables aléatoires S et T sont indépendantes.

Exercice 5. *Martingale.* Soit $\Omega = [0,1[$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la tribu $\mathcal{F}_n$ de Ω engendrée par la collection des intervalles $[k/2^n, (k+1)/2^n[$, $k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$ (cf. exercice 2, feuille 0). Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.

1. Déterminer $f_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$
2. Montrer que $\mathbb{E}[f_m|\mathcal{F}_n] = f_{\min\{n,m\}}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 6. *Couple de variables aléatoires admettant une densité.* Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant une densité[2] $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $(x,y) \mapsto \rho(x,y)|\varphi(x,y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{E}[\varphi(X,Y)|\sigma(X)] = F_\varphi(X)$, avec

$$F_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,\frac{\rho(x,y)}{\rho_X(x)}\,1_{\rho_X(x)>0}\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \rho_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. *Loi uniforme sur* $[-1,1]$. Soit $\Omega = [-1,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([-1,1])$ et $\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\omega$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $[-1,1]$. On considère la variable aléatoire $X : \omega \in \Omega \mapsto \omega^2 \in [0,1]$. Montrer que si Y est une variable aléatoire intégrable, alors

$$\mathbb{E}[Y|\sigma(X)](\omega) = \frac{1}{2}\big(Y(\omega) + Y(-\omega)\big) \quad \text{pour } \mathbb{P}\text{-presque tout } \omega \in \Omega.$$

Exercice 8. *Conditionnement et somme de variables aléatoires indépendantes.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la variable aléatoire $S_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \cdots)$ la tribu engendrée par la suite $(S_m)_{m\geq n}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n] = n^{-1} S_n\ .$$

Exercice 9. *Vecteurs aléatoires gaussiens.* Soit $(X_1, \cdots X_m)$ un m-tuple de variables aléatoires gaussiennes corrélées admettant la densité[2]

$$\rho(x_1, \cdots x_m) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^m}}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j\Big) \quad , \quad (x_1, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m\ ,$$

où $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ est une matrice $m \times m$ symétrique définie positive.

1. Montrer que $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = (A^{-1})_{ij}$ quel que soit $i, j = 1, \cdots m$.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_1|\sigma(X_2, \cdots, X_m)] = \sum_{i=2}^m \lambda_i X_i$$

où les λ_i sont des constantes réelles déterministes que l'on calculera en fonction des a_{ij}.

[2] On rappelle que (X,Y) admet une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) si la probabilité $P_{(X,Y)}$ sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ définie par $P_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}((X,Y) \in B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, c'est-à-dire $\mathrm{d}P_{(X,Y)}(x,y) = \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$.

Exercice 10. *Quelques propriétés générales des espérances conditionnelles.*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Montrer les affirmations suivantes.

1. Si X ne prend que 2 valeurs x_0 et x_1, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ si et seulement si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes.

2. Si $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$ presque sûrement.

3. Si X et Y sont de carré intégrable, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$ et $\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] = Y^2$, alors $X = Y$ presque sûrement.

4. Si $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et X ont même loi, alors $X = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ presque sûrement.
   Indications : Le cas le plus simple est celui où X est de carré intégrable.
   Dans le cas plus général où X admet seulement un premier moment, on peut procéder comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit $x_+ = \max\{x, 0\} = x\, 1_{x>0}$ et $\text{signe}(x) = 2\, 1_{x\geq 0} - 1$.

   (a) Montrer que $\mathbb{E}[X 1_{\{Y\geq 0\}}] = \mathbb{E}[X_+ 1_{\{Y\geq 0\}}]$ avec $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{E}[X_+|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]_+$).
   (b) En déduire que $\text{signe}(X) = \text{signe}(Y)$ presque sûrement.
   (c) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'égalité précédente est toujours presque sûrement vraie si l'on remplace X par $X - c$ et Y par $Y - c$.
   (d) En déduire que $X = Y$ presque sûrement.

5. X et Y sont indépendantes si et seulement si Y admet une loi conditionnelle $q_{Y|X}(x, \mathrm{d}y)$ sachant X qui ne dépend pas de x. Dans ce cas,
$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)|X] = g(X) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \mathbb{E}[\varphi(x,Y)] \; .$$

6. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes, alors
$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)|\mathcal{G}] = \int \varphi(x,Y)\, \mathrm{d}P_X(x) \; .$$

7. Si X et Y sont de carré intégrable, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :
$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\, \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] \; .$$