Master 1 Mathématiques, MAT414 Université Joseph Fourier
2009-2010

Feuille d'exercices 0 : théorie de la mesure, calculs de lois de variables aléatoires

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et si $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int |f(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \infty .$$

Si $A \in \mathcal{F}$, on note 1_A la fonction caractéristique sur A ($1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon).

Exercice 1.

1. Soit $p \geq 1$. Montrer que $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   Montrer que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ converge vers X pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$, alors elle converge également pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

2. Montrer que si $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors
   $$\lim_{x\to\infty} \left\|X \, 1_{\{|X|\geq x\}}\right\|_{L^p} = 0 .$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui converge vers X pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$. Montrer que $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, c'est-à-dire,
   $$\lim_{x\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|X_n \, 1_{\{|X_n|\geq x\}}\right\|_{L^p} = 0 .$$
   Indication : Montrer que $(|X_n - X|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable; en conclure que la suite positive $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable car elle est majorée par une somme de deux suites positives uniformément intégrables.

Exercice 2. Soit $\Omega = [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la tribu $\mathcal{F}_n$ engendrée par la collection d'intervalles $\{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)[\ ;\ k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$.

1. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{F}_n$-mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Exercice 3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que la tribu engendrée par X est la sous-tribu $\sigma(X) = \{X^{-1}(B)\ ;\ B \subset \mathbb{R} \text{ borélien}\} \subset \mathcal{F}$. Montrer que si Y est $\sigma(X)$-mesurable, alors il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ la tribu engendrée par X. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

1. Peut-on toujours associer à μ une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \sigma(X))$ telle que
   $$\mathbb{P}[X \in B] = \mu(B) \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{1}$$
   et si oui, cette mesure est-elle unique?

2. Même question si μ satisfait la propriété suivante : $\mu(B) = 0$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathrm{Im}(X)$ (où $\mathrm{Im}(X) \subset \mathbb{R}$ désigne l'image de X).

Exercice 5. Soit un point aléatoire distribué uniformément sur le demi-cercle $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = a^2 \; , \; y \geq 0\}$ de rayon a. Déterminer la loi de l'abscisse X de ce point.

Exercice 6. Soit N_1 et N_2 des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variance 1. Calculer la loi de la variable aléatoire $X = N_1/N_2$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires positives de même loi.

1. Soit $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X \geq 0$. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction caractéristique de deux variables 1_A, avec $A = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \; ; \; 0 \leq x \leq X(\omega)\}$, montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{P}[X \geq x]$ est intégrable et que
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \geq x] \, \mathrm{d}x \; . \tag{2}$$
2. Donner une autre démonstration de (2) dans le cas où la loi μ de X est de la forme $\mu(\mathrm{d}x) = \rho(x)\mathrm{d}x$ avec $\rho \in C(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.
3. On suppose que $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les variables aléatoires
$$M_N = \max\{X_1, \cdots, X_N\} \quad , \quad N \in \mathbb{N}^\star \; .$$
En utilisant la question 1, montrer que $N^{-1}\mathbb{E}[M_N] \to 0$ quand $N \to \infty$.