Master 1 Mathématiques, MAT414 Université Joseph Fourier

2007-2008

Corrigé du devoir surveillé du 30 avril 2008

Exercice 1.

1. $(\mathcal{F}_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une filtration de $\mathcal{F}$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{T_k}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ (car T_k est un temps d'arrêt) et $\mathcal{F}_{T_k} \subset \mathcal{F}_{T_{k+1}}$ car $T_k \leq T_{k+1}$ (cf. la Proposition 2.6 du polycopié de cours).

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $X_k = M_{T_k}$ est $\mathcal{F}_{T_k}$-mesurable car T_k est un temps d'arrêt pour une filtration adaptée au processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Proposition 2.6 du cours). En vertu du théorème d'arrêt pour les martingales régulières, on a
$$X_k = M_{T_k} = \mathbb{E}\big[M_\infty|\mathcal{F}_{T_k}\big] \tag{1}$$
où M_∞ est la limite presque sûre (et dans L^1) de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit par l'inégalité de Jensen que $|X_k| \leq \mathbb{E}\big[\,|M_\infty|\,\big|\mathcal{F}_{T_k}\big]$, d'où $\mathbb{E}\big[|X_k|\big] \leq \mathbb{E}\big[|M_\infty|\big]$. Comme M_∞ est intégrable (comme limite L^1 de variables aléatoires intégrables), il en découle que X_k est intégrable. En utilisant (1) et le fait que $\mathcal{F}_{T_k} \subset \mathcal{F}_{T_{k+1}}$, il vient
$$\mathbb{E}\big[X_{k+1}|\mathcal{F}_{T_k}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{T_{k+1}}]\big|\mathcal{F}_{T_k}\big] = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{T_k}] = X_k$$
(voir aussi le corollaire 3.18 du cours). Ceci montre que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{T_k})_{k\in\mathbb{N}}$-martingale.

3. On a déja vu dans la question 2 que $\mathbb{E}\big[|X_k|\big] \leq \mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et donc converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞. En fait, il découle de (1) que la martingale $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est régulière (Proposition 3.14 du cours) et donc l'on a également convergence dans L^1 vers $X_\infty = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{G}]$, avec $\mathcal{G} = \sigma\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{T_k}\big)$.

Exercice 2.

Rappelons que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (théorème de la limite centrale). Il paraît donc assez naturel que les propriétés d'intégrabilité de T soient différentes pour $c < \sigma$ et $c > \sigma$.

1. La variable aléatoire $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^\star \,;\, |S_n| > c\sqrt{n}\,\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ satisfait
$$\Big\{T = n\Big\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \underbrace{\Big\{|S_k| \leq c\sqrt{k}\Big\}}_{\in\, \mathcal{F}_k^S \,\subset\, \mathcal{F}_n^S} \bigcap \underbrace{\Big\{|S_n| > c\sqrt{n}\Big\}}_{\in\, \mathcal{F}_n^S} \;\in\; \mathcal{F}_n^S \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,$$
c'est donc un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Si T est intégrable, alors $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[T] = \sigma^2\mathbb{E}[T]$ d'après l'identité de Wald démontrée dans l'exercice 8 de la feuille de TD 4. Or $|S_T| > c\sqrt{T}$ par définition de T, d'où $\mathbb{E}\big[S_T^2\big] > c^2\,\mathbb{E}[T]$. Puisque c, σ et $\mathbb{E}[T]$ sont strictement positifs, il en résulte que $\sigma > c$.

3. On suppose que T n'est pas intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on considère le temps d'arrêt borné $T_n = T \wedge n$ et on pose $Y_n = X_{T_n}^2$.

   (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_{T_n}^2\big] &= \mathbb{E}\big[\big(S_{T_n-1} + X_{T_n}\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[S_{T_n-1}^2\big] + 2\,\mathbb{E}\big[S_{T_n-1}Y_n^{1/2}\big] + \mathbb{E}\big[Y_n\big]\\ &\leq \mathbb{E}\big[S_{T_n-1}^2\big] + 2\Big(\mathbb{E}\big[S_{T_n-1}^2\big]\mathbb{E}\big[Y_n\big]\Big)^{1/2} + \mathbb{E}\big[Y_n\big]\,.\end{aligned} \tag{0}$$

Puisque T_n est intégrable (car borné), l'identité de Wald précédente nous donne $\mathbb{E}[S_{T_n}^2] = \sigma^2\,\mathbb{E}[T_n]$. Par définition de T et de $T_n \le T$, $|S_{T_n-1}| \le c\sqrt{T_n-1}$, d'où $\mathbb{E}[S_{T_n-1}^2] < c^2\,\mathbb{E}[T_n]$. En divisant les membres de gauche et de droite de (0) par $\mathbb{E}[T_n]$, il vient

$$\sigma^2 \ < \ c^2 + 2\,c\left(\frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]}\right)^{1/2} + \ \frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]}\,. \tag{1}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. Puisque $T_n \in \{1,\dots,n\}$ et $Y_n = X_{T_n}^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n] &= \mathbb{E}\big[Y_n\,1_{\{Y_n \le \varepsilon\, T_n\}}\big] + \mathbb{E}\big[Y_n\,1_{\{Y_n > \varepsilon\, T_n\}}\big]\\
&\le \mathbb{E}\big[\varepsilon\, T_n\big] + \sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{E}\big[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}\,1_{\{T_n=j\}}\big] + \sum_{j=k}^{n}\mathbb{E}\big[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}\,1_{\{T_n=j\}}\big]\\
&\le \varepsilon\,\mathbb{E}[T_n] + \sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{E}\big[X_j^2\big] + \sum_{j=k}^{n}\mathbb{E}\big[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}\,1_{\{T_n\ge j\}}\big]\\
&= \varepsilon\,\mathbb{E}[T_n] + (k-1)\sigma^2 + \sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}[T_n \ge j]\;\mathbb{E}\big[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}\big]
\end{aligned}\tag{2}$$

(la dernière égalité découle de l'indépendance de $\{T_n \ge j\} = {}^c\{T_n < j\} \in \mathcal{F}_{j-1}^S$ et de X_j).

(c) La dernière somme dans (2) est égale à

$$\Sigma_{n,k} = \sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n}\mathbb{P}[T_n = i]\,\mathbb{E}[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}] = \sum_{i=k}^{n}\mathbb{P}[T_n = i]\sum_{j=k}^{i}u_j$$

avec $u_j = \mathbb{E}\big[X_j^2\,1_{\{X_j^2>\varepsilon\, j\}}\big]$. Notons que $0 \le u_j \le \sigma^2$ et que $u_j = \mathbb{E}\big[X_1^2\,1_{\{X_1^2>\varepsilon\, j\}}\big]$ pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$ (car X_j et X_1 ont même loi). Comme de plus X_1 est de carré intégrable, il s'ensuit que $u_j \to 0$ quand $j \to \infty$ par le théorème de la convergence dominée. Il existe donc un entier l tel que $u_j \le \varepsilon/2$ pour tout $j > l$. Ainsi,

$$0 \ \le \ \lim_{i\to\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}u_j \ \le \ \lim_{i\to\infty}\left(\sigma^2\frac{l}{i} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(i-l)}{i}\right) \ = \ \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Par conséquent, on peut trouver un entier k tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{i}u_j \le \varepsilon\, i$ pour tout $i \ge k$. Pour un tel k,

$$\Sigma_{n,k} \le \sum_{i=k}^{n}\mathbb{P}\big[T_n = i\big]\varepsilon\, i = \varepsilon\,\mathbb{E}[T_n] \qquad \text{pour tout } n \ge k. \tag{3}$$

(d) En remplaçant (3) dans (2) et en divisant par $\mathbb{E}[T_n]$, on obtient pour $n \ge k$

$$\frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]} \le 2\,\varepsilon + \frac{(k-1)\sigma^2}{\mathbb{E}[T_n]}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[T] = \infty$ par le théorème de la convergence monotone. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci prouve que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}[Y_n]}{\mathbb{E}[T_n]} = 0\,.$$

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini dans l'inégalité (1), on obtient ainsi $\sigma \le c$. Par contraposée et au vu du résultat de la question 2, nous avons démontré :

Proposition : $\mathbb{E}[T] < \infty$ si et seulement si $c < \sigma$.