Corrigé du devoir surveillé du 17 mars 2008

Exercice 1.
Les variables aléatoires U et V étant indépendantes, la densité (de la loi) du couple (U, V) vaut :

$$\rho_{(U,V)}(u,v) = \rho_U(u)\rho_V(v) = \frac{\lambda^{-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1}v^{b-1}e^{-(u+v)/\lambda}\, 1_{]0,\infty[}(u)\, 1_{]0,\infty[}(v) .$$

On pose $X = U + V$ et $Y = \frac{U}{U+V}$. L'application $\psi : (u, v) \mapsto (u + v, \frac{u}{u+v})$ est un difféomorphisme $(\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ d'inverse $\psi^{-1} : (x, y) \mapsto (xy, x - xy)$. Le Jacobien associé à ψ^{-1} est

$$J_{\psi^{-1}}(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x \neq 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[.$$

En effectuant le changement de variables $(x, y) = \psi(u, v)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X,Y)] &= \frac{\lambda^{-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\infty \mathrm{d}v\, u^{a-1}v^{b-1}e^{-(u+v)/\lambda}\, \varphi\left(u+v, \frac{u}{u+v}\right) . \\ &= \frac{\lambda^{-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, x\,(xy)^{a-1}(x-xy)^{b-1}e^{-x/\lambda}\, \varphi(x,y) \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Donc le couple (X, Y) a pour densité

$$\rho_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\lambda^{-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a+b-1}e^{-x/\lambda}\, 1_{]0,\infty[}(x)\, y^{a-1}(1-y)^{b-1}1_{]0,1[}(y) .$$

On remarque que cette densité est le produit d'une fonction ne dépendant que de x par une fonction ne dépendant que de y. Par conséquent, X et Y sont indépendantes et admettent les densités

$$\rho_X(x) = c\,\frac{\lambda^{-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a+b-1}e^{-x/\lambda}\, 1_{]0,\infty[}(x) \quad , \quad \rho_Y(y) = c^{-1}y^{a-1}(1-y)^{b-1}1_{]0,1[}(y) .$$

La constante de normalisation c s'obtient grâce à l'égalité $\int \mathrm{d}x\, \rho_X(x) = 1$, d'où $c = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. On en conclut que *la somme de 2 variables aléatoires U et V de lois Γ de paramètres (a, λ) et (b, λ) est une variable aléatoire de loi Γ de paramètre $(a + b, \lambda)$, indépendante de $Y = U/(U + V)$*. Notons aussi que Y suit une loi β de paramètre (a, b).

Exercice 2.

1. Les densités de (X, Y, Z) et de Z valent $f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f_{Z|X,Y}(z|x, y)f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ et $f_Z(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f_{(X,Y,Z)}(x, y, z)$. Or X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, donc $f_X(x) = 1_{]0,1[}(x)$ et

$$\begin{aligned} f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) &= (y-x)^2e^{-(z+1)(y-x)}\, 1_{[0,1]}(x)\, 1_{[x,\infty[}(y)\, 1_{[0,\infty[}(z) \\ f_Z(z) &= 1_{[0,\infty[}(z) \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^\infty \mathrm{d}y\, (y-x)^2e^{-(z+1)(y-x)} = 1_{[0,\infty[}(z) \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^2e^{-(z+1)t} \end{aligned}$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. La dernière intégrale dans la deuxième ligne est la dérivée seconde de $\int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-(z+1)t} = (z + 1)^{-1}$ par rapport à z, d'où $f_Z(z) = 2/(z + 1)^3\ 1_{[0,\infty[}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

2. On pose $V = Y - X$ et $W = Z(Y - X)$. Pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\big[\varphi(X,V,W\big] = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^\infty \mathrm{d}y \int_0^\infty \mathrm{d}z\, (y-x)^2e^{-(z+1)(y-x)}\, \varphi\big(x, y-x, z(y-x)\big) .$$

En utilisant le théorème de Fubini et en effectuant les changements de variables $w = z(y - x)$ et $v = y - x$ dans la troisième et la deuxième intégrale, il vient

$$\mathbb{E}\big[\varphi(X,V,W\big] = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}v \int_0^\infty \mathrm{d}w \, v \, e^{-v-w} \varphi(x,v,w) \; .$$

On en déduit que la densité de (X,V,W) est donnée par $f_{(X,V,W)}(x,v,w) = f_X(x) f_V(v) f_W(w)$ pour tout $(x,v,w) \in \mathbb{R}^3$, avec

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x) \quad , \quad f_V(v) = v\, e^{-v}\, 1_{[0,\infty[}(v) \quad , \quad f_W(w) = e^{-w}\, 1_{[0,\infty[}(w) \; .$$

Ainsi, (X,V,W) *est un triplet de variables aléatoires indépendantes et* V *et* W *sont distribuées selon la loi* Γ *de paramètre* $(2,1)$ *et la loi exponentielle de paramètre* 1.

Exercice 3.

1. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}[A] > 0$ et tout $G \in \mathcal{G}$, $\mathbb{P}[A \cap G] = \mathbb{E}[1_A 1_G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]1_G] = \int_G \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}] \, \mathrm{d}\mathbb{P}$. En appliquant également cette formule à $G = \Omega$, il vient
$$\mathbb{P}[G|A] = \frac{\mathbb{P}[A\cap G]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\int_G \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\mathbb{P}} \; . \tag{1}$$

2. Si $\mathcal{G} = \sigma(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ où $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω, alors $\mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[1_A|G_m]\, 1_{G_m}$, d'où
$$\int_{G_n} \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[1_A|G_m] \int_{G_n} 1_{G_m}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[1_A|G_n]\mathbb{P}[G_n] = \mathbb{P}[A|G_n]\mathbb{P}[G_n] \; .$$
Le dénominateur dans (1) se calcule de manière analogue. Ainsi la formule (1) se réduit à la formule de Bayes bien connue,
$$\mathbb{P}[G_n|A] = \frac{\mathbb{P}[A|G_n]\,\mathbb{P}[G_n]}{\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A|G_m]\,\mathbb{P}[G_m]} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \; .$$

Exercice 4.

1. Soit $0 \leq s \leq t$. Alors $X_s = \min\{X,s\} = \min\{X_t,s\}$. Puisque la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \min\{x,s\}$ est borélienne, il s'ensuit que $X_s \in \sigma(X_t)$ et donc $\sigma(X_s) \subset \sigma(X_t)$.

2. Supposons d'abord que $\mathbb{P}[X \geq t] > 0$. On sait que $\mathbb{E}[f(X)|X_t] = \varphi(X_t)$ où φ est une fonction borélienne $]-\infty,t] \to \mathbb{R}$ que l'on se propose de déterminer. Par définition de l'espérance conditionnelle, cette fonction satisfait
$$\mathbb{E}[\varphi(X_t)h(X_t)] = \mathbb{E}[f(X)h(X_t)] \tag{2}$$
pour tout $h :]-\infty,t] \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Mais $X_t = X$ si $X < t$ et $X_t = t$ si $X \geq t$, d'où
$$\mathbb{E}[f(X)h(X_t)] = \mathbb{E}[f(X)h(X)1_{\{X<t\}}] + h(t)\,\mathbb{E}[f(X)1_{\{X\geq t\}}] \; . \tag{3}$$
De même,
$$\mathbb{E}[\varphi(X_t)h(X_t)] = \mathbb{E}[\varphi(X)h(X)1_{\{X<t\}}] + \varphi(t)h(t)\,\mathbb{P}[X \geq t] \; . \tag{4}$$
En comparant ces deux expressions, on voit qu'il suffit de prendre $\varphi(x) = f(x)$ si $x < t$ et $\varphi(t) = \mathbb{E}[f(X)1_{\{X\geq t\}}]/\mathbb{P}[X \geq t]$. En effet, on définit bien ainsi une fonction borélienne $\varphi :]-\infty,t] \to \mathbb{R}$ (car f est supposée borélienne), qui satisfait (2). On en conclut que
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)|X_t] &= f(X_t)\,1_{]-\infty,t[}(X_t) + \frac{\mathbb{E}[f(X)1_{\{X\geq t\}}]}{\mathbb{P}[X\geq t]}\,1_{\{X_t=t\}} \\ &= f(X)\,1_{\{X<t\}} + \frac{\mathbb{E}[f(X)1_{\{X\geq t\}}]}{\mathbb{P}[X\geq t]}\,1_{\{X\geq t\}} \; . \end{aligned}$$
Traitons à présent le cas $\mathbb{P}[X \geq t] = 0$. Alors $\mathbb{E}[f(X)1_{\{X\geq t\}}] \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathbb{P}[X \geq t] = 0$, et donc d'après (3) et (4), $\mathbb{E}[f(X)h(X_t)] = \mathbb{E}[f(X)h(X)1_{\{X<t\}}]$ et $\mathbb{E}[\varphi(X_t)h(X_t)] = \mathbb{E}[\varphi(X)h(X)1_{\{X<t\}}]$, d'où $\mathbb{E}[f(X)|X_t] = f(X_t)$.