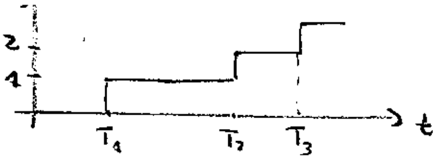
$X_t = X_{N(t)} = \sum_{m=0} \Delta_m$, $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{i=0} \tau_i \leq t\}$.



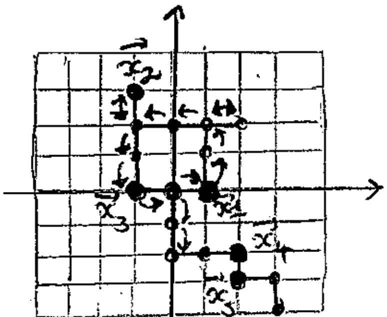
On peut montrer un résultat analogue à celui de la marche aléatoire à temps discrets : si $\langle \vec{\Delta}_m \rangle = 0$, alors $\langle \vec{X}_t \rangle = 0$ et $\varepsilon \langle \vec{X}_{t/\varepsilon} \rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} Dt$, où D est la constante de diffusion.

Le M$^{\underline{vt}}$ de la particule est donc diffusif à condition de (i) changer l'échelle de longueur $\vec{X} \to \sqrt{\varepsilon}\vec{X}$ (ce qui correspond à prendre un réseau de pas $\sqrt{\varepsilon}$ au lieu de 1) de sorte que la particule se déplace très peu à chaque saut (ii) changer l'échelle de temps $t \to t/\varepsilon$, de sorte que l'on a un très grand nombre de sauts quand ε est petit.

Remarque : Si $\langle \vec{\Delta}_m \rangle \neq 0$, on a un M$^{\underline{vt}}$ de "dérive" se superposant au M$^{\underline{vt}}$ diffusif. Par exemple, pour une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ à temps discret, si $p > \frac{1}{2}$ alors $\langle X_n \rangle = n(p-q) = n(\underbrace{2p-1}_{>0})$ croît linéairement avec le temps $t = n\tau$, (dérive vers la droite) et si $p < 1$ alors $\langle X_n \rangle = n(2p-1) < 0 \to$ dérive vers la gauche.

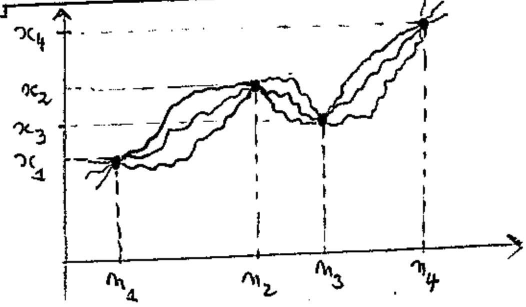
2). Probabilités P_k associées à un processus, processus stationnaire :

Dans l'exemple ③ ci-dessus, soit une suite infinie $(\vec{\delta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de valeurs prises par les déplacements $\vec{\Delta}_k$. La donnée de toutes ces valeurs définit les positions $\vec{X}_n$ de la particule à tout temps n. On parle de réalisation de la marche aléatoire $(\vec{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou bien de trajectoire.



Bien sûr, l'on ne peut pas connaître cette trajectoire à l'avance : on peut juste calculer la proba que la particule occupe les positions successives $\vec{X}_0 = \vec{0}$, $\vec{X}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{X}_2 = \vec{x}_2$, ... $\vec{X}_n = \vec{x}_n$ avec n fini. La proba. d'une trajectoire entière $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est en général nulle. On peut aussi fixer les positions de la particule à k temps arbitraires $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, la proba. qu'elle passe par les points $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$ est notée :

$$\boxed{P_k(x_1, n_1 ; x_2, n_2 ; \dots ; x_k, n_k) = \text{proba}(X_{n_1} = x_1 ; X_{n_2} = x_2 ; \dots ; X_{n_k} = x_k)} \quad (*)$$



Les P_k satisfont les propriétés

(i) $P_k(x_1, n_1 ; \dots ; x_k, n_k) \geq 0$

(ii) $\sum_{x_1} P_1(x_1, n_1) = 1$

(iii) $\sum_{x_k} P_k(x_1, n_1 ; \dots ; x_k, n_k) = P_{k-1}(x_1, n_1 ; \dots ; x_{k-1}, n_{k-1})$

D'après (i-iii), $(x_1, \dots, x_k) \mapsto P_k(x_1, n_1 ; \dots ; x_k, n_k)$ est une loi de proba (c'est la loi du k-uplet de VAs $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$).

On peut montrer que si l'on se donne une famille infinie de proba $\{P_k\}$ satisfaisant (i-iii), alors il existe un unique processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq. (*) soit vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots n_k \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots x_k \in S$ (théorème de Kolmogorov). En d'autres termes, la donnée des P_k spécifie complètement le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dit stationnaire si

$$\boxed{P_k(x_1, n_1 ; \dots ; x_k, n_k) = P_k(x_1, 0 ; x_2, n_2 - n_1 ; \dots ; x_k, n_k - n_1)} \quad \forall\, n_1 < n_2 < \dots < n_k$$

. En particulier, $P_1(x_1, n_1) = P_1(x_1, 0)$ ne dépend pas du temps et donc $\langle f(X_n)\rangle = \sum_{x_n} f(x_n)\, P_1(x_n,n) = \sum_{x} f(x)\, P_1(x,0) = \langle f(X_0)\rangle$

⚠ "stationnaire" ne signifie pas X_n indépendant de n, seules les moyennes sont indépendantes du temps !

3). Fonctions de corrélations temporelles

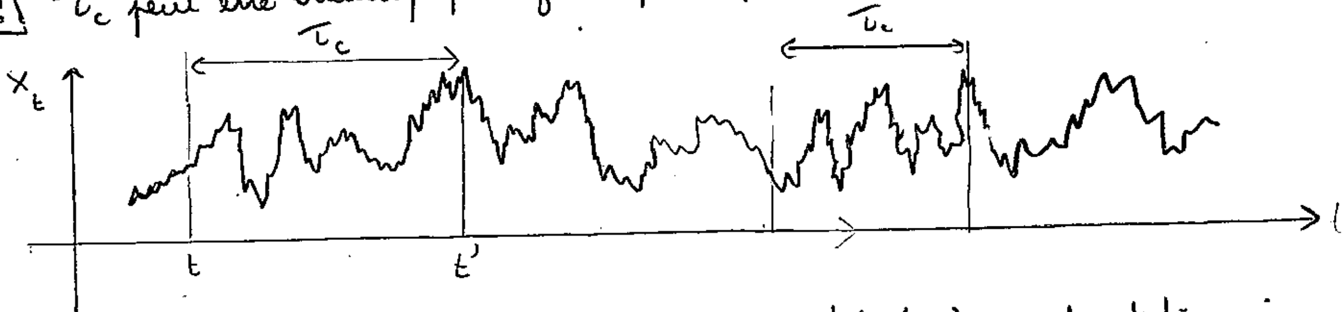
Mis à part connaître la moyenne d'une fonction de X_t à un temps fixé t (par ex. $\langle X_t\rangle$, $\langle X_t^2\rangle$, ...), il est souvent important en physique d'étudier les corrélations temporelles d'un processus stochastique. On s'intéresse notamment à la covariance de X_t et $X_{t'}$ à des temps différents $t \neq t'$:

$$f(t,t') = \mathrm{cov}(X_t, X_{t'}) = \langle X_t X_{t'}\rangle - \langle X_t\rangle\langle X_{t'}\rangle$$

En général les corrélations décroissent quand $|t-t'|$ augmente. Le temps caractéristique τ_c tq. $f(t,t') \simeq 0$ si $|t-t'| \geq \tau_c$ est appelé le temps de corrélation du processus : pour des temps séparés par τ_c ou plus, X_t et $X_{t'}$ ne sont plus corrélées (ce qui ne veut pas dire que ce sont des VAs indépendantes — sauf pour les processus gaussiens — cf I 4).).

En général, τ_c dépend de la "fenêtre de temps" considérée (cf dessin ci-dessous).

⚠ τ_c peut être beaucoup plus grand que le tps caractéristique des variations de X_t



Si le processus (pour fixer les idées, à temps discret) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, pour $n<n'$

$$f(n,n') = \langle X_n X_{n'}\rangle - \langle X_n\rangle\langle X_{n'}\rangle = \sum_{x,x'} x x'\, P_2(x,n;x',n') - \langle X_0\rangle^2$$

$$= \sum_{x,x'} x x'\, P_2(x,0;x',n'-n) - \langle X_0\rangle^2$$

$$= f(0,n'-n) = \langle X_0 X_{n'-n}\rangle - \langle X_0\rangle^2$$

ne dépend que de la différence de temps $n'-n$. Alors le temps de corrélation τ_c est le même sur toutes les fenêtres de temps.

4). Processus markoviens :

Etant donné un processus à temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spécifié par la hiérarchie de proba. $\{P_k\}$, on définit les proba. conditionnelles

$$P_{\ell|k}(y_1,m_1;\dots;y_\ell,m_\ell \mid x_1,n_1;\dots;x_k,n_k) = \frac{P_{\ell+k}(x_1,n_1;\dots;x_k,n_k;y_1,m_1;\dots;y_\ell,m_\ell)}{P_k(x_1,n_1;\dots;x_k,n_k)}$$

Dans le cas d'une marche aléatoire $P_1(y,m \mid x,n)$ est par ex. la proba. que la particule se trouve en y au temps m sachant qu'elle était en x au temps $n<m$. Puisque les déplacements sont indépendants, il importe peu quel chemin a suivi la particule avant le tps n pour arriver au site x : si l'on sait qu'elle se trouvait en x au tps n, la proba de la trouver en y au tps $m>n$ ne dépend pas des sites visités entre 0 et n. Un processus satisfaisant cette propriété est dit markovien. Il est "sans mémoire", au sens où il n'est pas nécessaire de connaître toute l'"histoire" (ici, le morceau de trajectoire) entre les temps 0 et n pour calculer la proba. de X_{n+1}, il suffit de connaître X_n et sa loi de proba. Un processus markovien à temps discret est un processus vérifiant

$$\boxed{P_{l|k}(y_1,m_1;\dots;y_l,m_l \mid x_1,n_1;\dots;x_k,n_k) = P_{l|1}(y_1,m_1;\dots;y_l,m_l \mid x_k,n_k)} \quad (**)$$

pour tout $n_1 \leq \dots \leq n_k \leq m_1 \leq \dots \leq m_l$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P_k(x_1,n_1;\dots;x_k,n_k) &= P_{1|k-1}(x_k,n_k \mid x_1,n_1;\dots;x_{k-1},n_{k-1})\, P_{k-1}(x_1,n_1;\dots;x_{k-1},n_{k-1}) \\
&\overset{(**)}{=} P_{1|1}(x_k,n_k \mid x_{k-1},n_{k-1})\, P_{k-1}(x_1,n_1;\dots;x_{k-1},n_{k-1}) \\
&= \dots \\
&= P_{1|1}(x_k,n_k \mid x_{k-1},n_{k-1})\, P_{1|1}(x_{k-1},n_{k-1} \mid x_{k-2},n_{k-2}) \cdots P_{1|1}(x_2,n_2 \mid x_1,n_1)\, P_1(x_1,n_1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la famille entière de proba $\{P_k\}$ caractérisant un tel processus peut s'obtenir à partir des proba. de transition $P_{1|1}(y,n+1 \mid x,n)$ et de la loi initiale $\mu_0(x) = P_1(x,0)$

Exercice : Exprimer $P_2(x,1;y,2)$ en fonction des proba de transition et de μ_0.
$= P_{1|1}(y,2 \mid x,1)\, P_1(x,1) = \sum_z P_{1|1}(y,2 \mid x,1)\, P_{1|1}(x,1 \mid z,0)\, \mu_0(z)$

De nombreux processus markoviens rencontrés en physique ont des proba de transition indépendantes du tps n, on les note $p_{x\to y}$. Dans ce cas, on a $P_{1|1}(y,n+1 \mid x,n)$

par ex. $P_3(x_0,0;x_1,1;x_2,2) = \mu_0(x_0)\, p_{x_0\to x_1}\, p_{x_1\to x_2}$.

Pour une marche aléatoire partant de l'origine (cf II).1), ex ③), on a

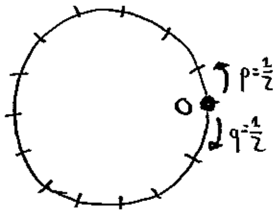
$$P_1(\vec{x}_0,0) = \delta_{\vec{x}_0,\vec{0}} \quad , \quad p_{\vec{x}\to\vec{y}} = \begin{cases} p_{\vec{y}-\vec{x}} & \text{si } |\vec{y}-\vec{x}|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tous les processus de réaction-diffusion discutés de ce cours et celui de Léonie sont des processus markoviens de proba. de transition indépendantes du temps, qui sont complètement caractérisés par les $p_{x\to y}$ (ou, s'il s'agit d'un processus à temps continu, par des taux de transition $\sigma_{x\to y}$ - c'est-à-dire par des proba. de transition par unité de temps) et par leur loi initiale $\mu_0(x)$.

5). Etat stationnaire

Un état stationnaire d'un processus dynamique déterministe est un état indépendant du temps : par ex., un corps en équilibre mécanique (somme des forces exercées $=\vec{0}$) est dans un état stationnaire (il ne bouge pas). Pour un processus stochastique, c'est trop demander que d'exiger $X_t = X_0 \ \forall t$. Par ex., considérons un gaz à l'équilibre dans un récipient. Sa température, sa pression et son volume (sa densité) ne varient pas au cours du temps. Pourtant, les molécules du gaz ne sont pas au repos ; la force qu'elles exercent lors des collisions sur les parois du récipient fluctue de manière aléatoire au cours du temps, de telle sorte que sa moyenne sur un intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$, avec $\Delta t \gg$ intervalle de tps entre 2 chocs ne dépend pas de t.

Plus généralement, on dit que la loi initiale $\mu_0(x)$ d'un processus markovien est un état stationnaire pour ce processus si le processus est stationnaire. Étant donné un processus markovien non stationnaire, caractérisé par ses proba. de transition $p_{x\to y}$ et sa loi initiale, on peut parfois trouver une autre loi initiale μ_0 qui est un état stationnaire du processus (c'est-à-dire tq. le processus de proba de transition $p_{x\to y}$ et de loi initiale μ_0 est stationnaire), mais cela n'est pas toujours possible. Par exemple, considérons une marche aléatoire partant de 0 sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (N points régulièrement espacés sur un cercle). Si les proba. de sauter à gauche et à droite sont égales, $p = q = \frac{1}{2}$, on parle de marche aléatoire symétrique.



La loi initiale $\mu_0(x) = \frac{1}{N} \ \forall x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ constitue un état stationnaire de la marche aléatoire symétrique (c'est clair intuitivement).

Si μ_0 est un état stationnaire, alors

$$\text{proba}(X_n = x_n) = P_1(x_n, n) = \sum_{x_0, \ldots, x_{n-1}} \mu_0(x_0)\, p_{x_0\to x_1} \cdots p_{x_{n-1}\to x_n}$$ ne dépend pas de n et donc (cf II 2).)

$$\boxed{\langle f(X_n)\rangle = \langle f(X_0)\rangle = \sum_x \mu_0(x) f(x)}$$ pour tout temps $n \in \mathbb{N}$

De manière analogue à la dynamique déterministe d'un corps solide évoluant vers un état d'équilibre sous l'effet des forces appliquées, certains processus stochastiques évoluent à grand temps soit vers un état d'équilibre [qui est un état stationnaire, comme par ex. l'état du gaz dans un récipient : si l'on comprime légèrement le gaz à l'aide du piston puis l'on relâche ce dernier, le gaz va revenir de lui-même à sa position d'équilibre], soit vers un état stationnaire hors équilibre (par ex. si l'on chauffe une des parois du récipient, il va s'établir après un régime transitoire un gradient thermique uniforme dans le gaz ; celui-ci est dans un état stationnaire avec un courant thermique qui ne varie plus au cours du temps, cet état n'est pas un état d'équilibre du gaz]. Les processus de réaction-diffusion qui ont un état absorbant possèdent cette propriété de convergence vers un état stationnaire