CHAP 1 — INTRODUCTION AUX PROCESSUS STOCHASTIQUES

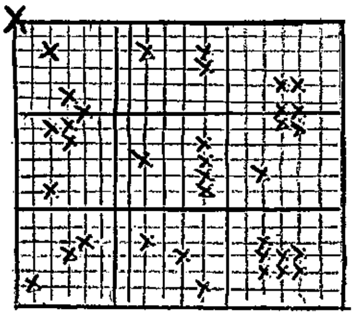
- Les comportements aléatoires sont omni-présents en physique, en chimie et en biologie. On observe de tels comportement notamment dans les systèmes complexes. → "stochastique"
- En physique on s'interesse à l'évolution temporelle d'un objet (cristal, molécules d'un gaz ou d'un liquide, corps solide, grains de sable, atomes, etc..) → "processus dynamique"

I). Notion de variables aléatoires:

1). Variables aléatoires discrètes et continues – moyenne et variance

Considérons les expériences suivantes que l'on peut répéter un grand nb de fois N dans des conditions identiques:

1. on lance une pièce de monnaie et l'on observe si elle retombe pile ou face
2. on lance un dé à 6 faces et l'on observe le chiffre obtenu
3. les pommiers d'un verger sont plantés à intervalles réguliers, ils forment un réseau carré. On partage ce verger en N parcelles, contenant chacunes le même nb M d'arbres; on observe l'emplacement des arbres malades sur chaque parcelle,



4. on lance une aiguille sur une table sans privilégier une direction et l'on observe l'angle que forme l'aiguille avec le bord de la table.

Dans toutes ces expériences, le résultat obtenu n'est pas à priori prévisible [sauf si la pièce ou le dé est truqué, ou si tous les pommiers sont soit sains soit malades ...], on parle de "hasard".

Le résultat est décrit par une variable aléatoire X, qui peut prendre

1. 2 valeurs $x=0$ (= pile) ou $x=1$ (face) $\Rightarrow X \in \{0,1\} = S$
2. 6 valeurs $X \in \{1,2,\dots,6\} = S$
3. 2^M valeurs $X \in \{0,1\}^M = S$, $x = (0,\dots,0,\underset{i\text{-ème arbre malade}}{1},0 \dots 0) \in S$

] VAs discrètes

4. idéalement une infinité non dénombrable de valeurs, $X \in]-\pi, \pi]$ (angle en radians)

] VA continue

Une variable aléatoire (VA) est caractérisée par une loi de probabilité $\{p_x \,;\, x \in S\}$

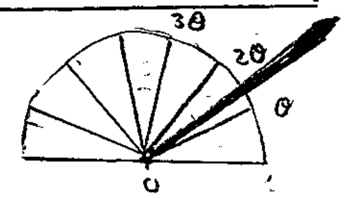
Dans les expériences ①-③, on obtient les probabilités p_x de manière empirique par:

$\boxed{p_x = \frac{N_x}{N}}$ où N_x est le nb d'expériences (dans le cas ③, de parcelles) ayant donné le résultat $x \in S$ et le nb total N d'expériences est supposé très grand. Autrement dit, p_x est la fraction de résultats $X = x$. Les p_x sont compris entre 0 et 1 et satisfont $\boxed{\sum_{x\in S} p_x = 1}$.

Dans l'expérience ④, on peut déterminer comme ci-dessus les probabilités p_i que l'angle soit compris dans l'intervalle $[i\theta, (i+1)\theta]$, où $0 < \theta < \pi$ est fixé. L'angle aléatoire X admet une densité de probabilité $\rho(x) :]-\pi, \pi] \to [0, \infty[$ définie par :

$p_i = \int_{i\theta}^{(i+1)\theta} dx\, \rho(x)$ ou, plus généralement $\boxed{\int_a^b dx\, \rho(x) = \text{proba que } X \in [a,b]}$

On a $\rho(x) \geq 0$ et $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \rho(x) = \sum_i p_i = 1}$.



Si la pièce et le dé ne sont pas truqués et si l'on néglige les effets de contamination de maladies entre arbres voisins, on a

① $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$

② $p_x = \frac{1}{6}$, $x \in \{1, 2, .. 6\}$

③ $p_x = p^m (1-p)^{M-m}$ où m est le nb de composantes égales à 1 dans le M-uplet $x = (x_1, .., x_M)$ et p est la proba qu'un arbre choisi au hasard soit malade.

④ $\rho(x) = \frac{1}{\pi}$, $0 \leq x < \pi$ $\iff$ proba$(X \in [a,b]) = \frac{b-a}{\pi}$ ← distribution uniforme

Rmq : On peut associer à une VA discrète une densité de proba comme pour les VAs continues, mais il s'agit d'une distribution et non d'une fonction usuelle. On définit la "distribution de Dirac" $\delta(x - x_i)$ par $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)\, \delta(x - x_i) = g(x_i)$ $\forall$ g fonction continue.
La densité de proba de la VA discrète $X \in S$ est
$\rho(x) = \sum_{x_i \in S} p_{x_i} \delta(x - x_i)$
On a bien $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) = \sum_{x_i} p_{x_i} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_i) = \sum_{x_i} p_{x_i} = 1$

Valeur moyenne : $\boxed{\langle X \rangle = \sum_x p_x x}$ $= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$ (cas d'une VA discrète)

$\boxed{\langle X \rangle = \int dx\, \rho(x) x}$ (cas général)

très souvent cette limite existe et est déterministe, c'est-à-dire $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \simeq \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{2N} x_n$ pour N assez grand

Plus généralement, si f est une fonction continue qcq, alors $Y = f(X)$ est une nouvelle VA de moyenne $\boxed{\langle f(X) \rangle = \int dx\, \rho(x) f(x)}$

Par linéarité de $\int$, si $Y = f(X)$, $Z = g(X)$ et $a \in \mathbb{R}$, $\langle Y + aZ \rangle = \langle Y \rangle + a \langle Z \rangle$

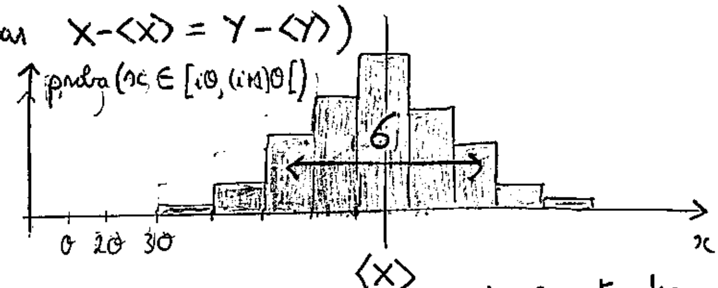
Pour $f(x) = c^{te} = a$, $Y = f(X)$ est déterministe et $\langle Y \rangle = \int dx\, \rho(x)\, a = a$

Variance : On peut estimer l'amplitude des fluctuations de X autour de sa moyenne par :

$\boxed{\sigma^2 = (\Delta X)^2 = \langle \underbrace{(X - \langle X \rangle)}_{\text{VA de moyenne nulle caractérisant les fluctuations de X}}{}^2 \rangle} = \langle X^2 - 2X\langle X \rangle + \langle X \rangle^2 \rangle \underset{\text{linéarité}}{=} \langle X^2 \rangle - 2\langle X \rangle\langle X \rangle + \langle X \rangle^2 = \boxed{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \sigma^2}$

σ^2 est appelé la variance de X ou encore l'écart quadratique moyen.

Remarquons que si a est un nb déterministe (non aléatoire), $Y = X + a$ et X ont même σ^2 (car $X - \langle X\rangle = Y - \langle Y\rangle$)



expérience du lancé d'une aiguille avec une direction privilégiée

σ caractérise la taille des fluctuations, càd, la dispersion des données expérimentales

2). Variables aléatoires en physique :

ⓐ Les résultats de mesures expérimentales sur un même spécimen ou sur des spécimens identiques d'une quantité physique X ne donnent jamais exactement les mêmes valeurs. En effet, ces valeurs dépendent de l'état précis de l'appareil de mesure et de son environnement, qui varie en fonction du temps et n'est jamais le même à chaque mesure.
Pour obtenir les lois physiques prédites (ou non!) par la théorie, on moyenne X sur un grand nb N de mesures. Pour estimer l'erreur expérimentale [à prendre en compte si l'on veut valider / invalider la théorie] on calcule l'écart quadratique moyen

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \underbrace{\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{n=1}^{N} x_n\Big)^2}_{= \langle X\rangle^2}$$

EX : Variation de la T° du sol en fonction de la profondeur
Théorie : pour des profondeurs z pas trop importantes, $T \simeq g|z|$ ← gradient de T°
↳ montrer un graphique de données expérimentales

ⓑ Considérons les positions et vitesses d'un ensemble de corps en intéraction. En mécanique classique, on peut en principe déterminer ces positions et vitesses à l'instant t à partir des données initiales, en intégrant les équations de Newton. Mais en pratique c'est presque tjs impossible si l'on a plus de 2 corps. En effet, les trajectoires varient énormément si l'on change très peu les données initiales, (c'est l'effet papillon bien connu dans les systèmes chaotiques. [Vu que l'on ne peut pas mesurer les positions $\vec{x}_k(0)$ et vitesses $\vec{V}_k(0)$ initiales de manière infiniment précise, l'on ne peut pas prédire les valeurs de $\vec{x}_k(t)$ et $\vec{V}_k(t)$ $\Rightarrow$ on suppose que ce sont des VAs [soit 6 VAs continues par corps — correspondant aux 3 composantes de $\vec{x}_k(t)$ et $\vec{V}_k(t)$].

ⓒ Si les corps sont des atomes ou des particules élémentaires obéissant aux lois de la mécanique quantique, l'aléatoire intervient de manière plus fondamentale. En effet, cette théorie ne prédit que les probabilités des résultats d'une mesure idéale, par ex. de la position ou de l'impulsion d'une particule

(d) Pour décrire le comportement de systèmes macroscopiques tels un gaz ou un liquide, la propagation de la chaleur ou un courant électrique dans un métal, etc.., la **physique statistique** fait appel aux VAs pour la raison suivante. Il est impossible de prédire les positions et vitesses de toutes les molécules du gaz ou de tous les électrons de conduction du métal à cause de (b) ci-dessus et surtout à cause du très grand nb de particules ($\simeq \mathcal{N} = 6{,}023.10^{23}$), et également en raison de l'interaction des molécules avec l'environnement (par ex. la paroi du piston retenant le gaz).

Heureusement, l'on peut décrire le gaz dans son ensemble au moyen de quelques **grandeurs macroscopiques** (pression, T°, densité, ...) qui correspondent à des **moyennes** de fonctions des positions $\vec{X}_k(t)$ et vitesses $\vec{V}_k(t)$ des molécules du gaz. Le "miracle" est que ces grandeurs macroscopiques ne dépendent pas des détails de l'évolution des $\vec{X}_k(t)$ et $\vec{V}_k(t)$ mais obéissent à des lois simples qui ne font intervenir que ces grandeurs elles-mêmes ! Les moyennes sont en fait des moyennes sur des petits intervalles de temps de longueur Δt, ce qui est justifié par le fait que les appareils de mesure ne sont pas sensibles aux variations rapides (sur des échelles de tps $\ll \Delta t$) des positions et vitesses de chaque molécule. Par ex., un piston, vu son inertie, ne réagit qu'à la force moyenne exercée par les multiples collisions des molécules sur la paroi survenant entre t et $t+\Delta t$, Δt étant choisi suffisamment petit pour que la force moyenne $\langle \vec{F}(t) \rangle$ ne varie pas sur l'échelle de tps Δt, mais très grand devant l'intervalle de tps séparant 2 collisions consécutives.

C'est à cause de cette séparation des échelles de temps, appelée "**Stoßzahlansatz**" ou "**chaos moléculaire**" que l'on peut décrire le gaz à l'aide de VAs [dans l'ex. précédent, la force $F(t)$ exercée par les molécules sur la paroi du piston, autrement dit la pression $P(t)$ du gaz], dont les moyennes obéissent aux lois de la thermodynamique (ou, dans le cas de la conduction électrique dans un métal, à la loi d'Ohm).

Les fluctuations sont en général relativement faibles, sauf aux points critiques discutés dans le cours de Leonie.

L. 24/09

3). Fonction caractéristique ; cumulants

Soit X une VA de densité de proba $\rho(x)$ prenant ses valeurs dans $S \subset \mathbb{R}$. On définit la **fonction caractéristique** de X par

$$\boxed{G(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int_S dx\, \rho(x) e^{ikx}}$$

Propriétés : (i) $G(0) = 1$

(ii) $|G(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

(iii) $\left(\frac{d^n G}{dk^n}\right)(0) = \int_S dx\, \rho(x) (ix)^n = i^n \langle X^n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \boxed{G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle}$

<u>EX</u>: VA continue uniformément distribuée sur $[-\pi,\pi]$:

$$G(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{ikx} = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = 1 - \frac{(\pi k)^2}{6} + \dots$$

$$(iii) \Rightarrow \langle X\rangle = 0, \quad \langle X^2\rangle = \frac{\pi^2}{3}$$

Dans le cas d'une VA discrète, $G(k) = \sum_{x_i} p_{x_i} \int_S dx\, \delta(x-x_i) e^{ikx} = \sum_{x_i} p_{x_i} e^{ikx_i}$

Si X prend ses valeurs dans $S = \mathbb{N}$, il est pratique de poser $\eta = e^{ik}$ et de prendre k imaginaire pur t.q. $\mathrm{Im}\,k \geq 0$, de sorte que $\boxed{\eta \in]0,1[}$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{G}(\eta) = \langle \eta^X\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \eta^i}$$

Parfois on doit considérer des VAs entières pouvant devenir infinies [par ex. si X est une population de bactérie pouvant se diviser, cf plus loin], c-à-d $S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a alors :

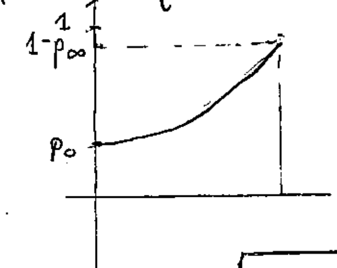
(i') $\lim_{\eta\to 0^+} \tilde{G}(\eta) = \text{proba}(X=0) = p_0$ (car $\lim_{\eta\to 0^+} \eta^i = \delta_{i0}$)

(ii') $\lim_{\eta\to 1^-} \tilde{G}(\eta) = \text{proba}(X<\infty) = 1 - \text{proba}(X=\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i$ (car $\lim_{\eta\to 1^-} \eta^i = 1$ et $\eta^\infty = 0$)

(iii') $\lim_{\eta\to 0^+} \frac{d^i\tilde{G}}{d\eta^i} = i!\, p_i$

(iv') $\lim_{\eta\to 1^-} \frac{d\tilde{G}}{d\eta} = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$ ⚠ si $p_\infty > 0$ on a $\langle X\rangle = \infty \neq \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$

(v') $\tilde{G}(\eta)$ est croissante et convexe, c-à-d, $\frac{d\tilde{G}}{d\eta} \geq 0$ et $\frac{d^2\tilde{G}}{d\eta^2} \geq 0$



(car $\frac{d\tilde{G}}{d\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} i \underbrace{\eta^{i-1}}_{\geq 0} \underbrace{p_i}_{\geq 0}$ et $\frac{d^2\tilde{G}}{d\eta^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) \underbrace{\eta^{i-2}}_{\geq 0} \underbrace{p_i}_{\geq 0}$)

<u>Cumulants</u> : $\boxed{G(k) \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} K_m \right\}}$

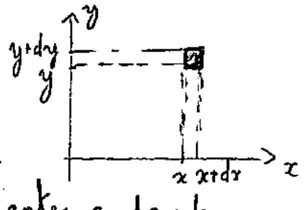
$$G(k) \stackrel{(iii)}{=} 1 + ik\langle X\rangle + \frac{(ik)^2}{2}\langle X^2\rangle + \dots = \exp\left\{ ikK_1 + \frac{(ik)^2}{2}K_2 + \dots\right\} = ikK_1 + \frac{(ik)^2}{2}K_2 + \frac{(ik)^2}{2}K_1^2 + \dots$$

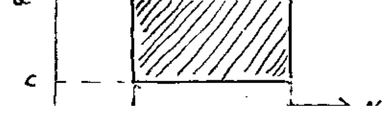
$$\Rightarrow \boxed{K_1 = \langle X\rangle, \quad K_2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = \sigma^2}$$

4). <u>Indépendance statistique ; probabilité conditionnelle</u>

Soit X et Y deux VAs à valeurs réelles. Si l'on veut déterminer la moyenne de XY il ne suffit pas en général de connaître les densités de proba $\rho_X(x)$ et $\rho_Y(y)$ respectives de X et Y : on a besoin de la <u>densité jointe</u> $\rho_{X,Y}(x,y)$ de X et Y, qui est une fonction de 2 variables satisfaisant

$\rho_{X,Y}(x,y) \geq 0$ et $\boxed{\int_a^b dx \int_c^d dy\, \rho_{X,Y}(x,y) = \text{proba}(X \in [a,b] \text{ et } Y \in [c,d])}$





$\rho_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$ proba que X soit compris entre x et x+dx et Y entre y et y+dy

Pour une fonction de 2 variables qcq $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\langle f(X,Y)\rangle = \int dx\,dy\, p_{X,Y}(x,y)\, f(x,y)$$

EX : X = résultat d'un lancé de dé $X \in \{1,2,..,6\}$

$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X<6 \\ \text{résultat d'un } 2^{nd} \text{ lancé de dé si } X=6 \end{cases}$ (on rejoue après un "6")

$Y \in \{0,1,2,..6\}$

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x<6 \text{ et } y=0 \\ \frac{1}{36} & \text{si } x=6 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\langle X+Y\rangle = \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=0}^{7} p_{x,y}(x+y) = \sum_{x=1}^{5}\frac{1}{6}(x+0) + \sum_{y=1}^{6}\frac{1}{36}(6+y) = \frac{1}{\cancel{6}}\frac{5\times\cancel{6}}{2} + 1 + \frac{1}{\cancel{36}_{6}}\frac{\cancel{6}\times 7}{2} = \frac{49}{12}$$

$$\langle XY\rangle = \sum_{x=1}^{6}\sum_{y=0}^{7} p_{x,y}\, xy = \sum_{x=1}^{5}\frac{1}{6}x\times 0 + \sum_{y=1}^{6}\frac{1}{36}6\times y = \frac{1}{6}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Si l'on veut déterminer la moyenne d'une fonction dépendant uniquement de X (ou de Y) l'on peut utiliser la proba de X en ignorant Y ("marginale"),

$$\boxed{p_X(x) = \underbrace{\sum_y}_{\text{VA discrète}} p_{X,Y}(x,y)} \Rightarrow \langle g(X)\rangle = \sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y)\, g(x) = \sum_x p_X(x)\, g(x)$$ (de même $\langle h(Y)\rangle = \sum_y p_Y(y)\, h(y)$)

Dans l'EX précédent,

$p_X(x) = \frac{1}{6}\quad \forall\, x\in\{1,..,6\}$ (résultat du 1^{ier} lancé de dé) $\Rightarrow \langle X\rangle = \sum_{x=1}^{6}\frac{1}{6}x = \frac{7}{2}$

$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{si } y=0 \quad \text{(proba de ne pas rejouer)} \\ \frac{1}{36} & \text{si } y>0 \quad \text{(proba de rejouer et d'obtenir } y) \end{cases}$ $\Rightarrow \langle Y\rangle = \sum_{y=1}^{6}\frac{1}{36}y = \frac{7}{12}$

Notons que $\langle X\rangle + \langle Y\rangle = \frac{49}{12} = \langle X+Y\rangle$ (linéarité de la moyenne) mais $\langle X\rangle\langle Y\rangle = \frac{49}{24} \neq \langle XY\rangle$

Deux VAs X et Y sont dites statistiquement indépendantes ssi $\boxed{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)\quad \forall x,y}$

Dans ce cas, $\boxed{\langle g(X)\, h(Y)\rangle} \underset{\text{VAs discrètes}}{=} \sum_{x,y} p_X(x)\, p_Y(y)\, g(x)\, h(y) = \left(\sum_x p_X(x)\, g(x)\right)\left(\sum_y p_Y(y)\, h(y)\right) = \boxed{\langle g(X)\rangle\langle h(Y)\rangle}$

On peut montrer que X et Y sont indépendantes ssi la fonction caractéristique $\boxed{G_{X,Y}(k_1,k_2) = \langle e^{i(k_1X+k_2Y)}\rangle}$ se factorise : $G_{X,Y}(k_1,k_2) = G_X(k_1)\, G_Y(k_2)$

La covariance $\boxed{C_{X,Y} = \langle (X-\langle X\rangle)(Y-\langle Y\rangle)\rangle = \langle XY\rangle - \langle X\rangle\langle Y\rangle}$ est nulle si X et Y sont indépendante et, si ce n'est pas le cas, permet d'estimer les corrélations entre X et Y.

Mais ⚠ $C_{X,Y}=0 \not\Rightarrow$ X et Y sont indépendantes !

Probabilité conditionnelle (cas des VAs discrètes) : on fixe $Y=y$

$\boxed{p(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}}$: proba que $X=x$ sachant que $Y=y$

Notons que $p(x|y) \geq 0$ et $\sum_x p(x|y) = 1 \rightarrow \forall y$ fixé, $\{p(x|y) ; x \in S_x\}$ définit une loi de proba

<u>X et Y indépendantes</u> $\Rightarrow$ <u>$p(x|y) = p_X(x)$ est indépendant de y</u> (savoir que $Y=y$ ne "donne aucune information" sur X" et ne modifie donc pas sa probabilité).

Dans l'EX précédent, $p(y|x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y=0 \text{ et } x \neq 6 \\ \frac{1}{6} & \text{si } y>0 \text{ et } x=6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Addition de variables aléatoires :</u> $Z = X+Y$ est une VA de proba

$p_Z(z) = \sum_x p(x, z-x)$

Si <u>X et Y sont indépendantes</u> alors la fonction caractéristique de Z vaut $\boxed{G_Z(k) = G_X(k) G_Y(k)}$

En effet, $G_Z(k) = \sum_z p_Z(z) e^{ikz} = \sum_{z,x} p(x, \underbrace{z-x}_{y}) e^{ikz} = \sum_{x,y} p(x,y) e^{ik(x+y)} =$

$$\underset{X,Y \text{ indep}}{=} \sum_{x,y} p_X(x) p_Y(y) e^{ik(x+y)} = \left(\sum_x p_X(x) e^{ikx}\right)\left(\sum_y p_Y(y) e^{iky}\right)$$

7/10

II). Processus stochastiques :

1). Définition et exemples :

Un <u>processus stochastique</u> est simplement une famille $(X_t)_{t \geq t_0}$ de VAs indicée par une variable de temps t. Si t varie dans un intervalle $[t_0, \infty[$ on parle de <u>processus à temps continu</u>. Si t prend des valeurs discrètes $t_0, t_0+\tau, t_0+2\tau, \ldots$ on parle de <u>processus à temps discret</u> ; cela correspond à observer un processus à temps continu à des temps déterminés (régulièrement espacés) ; dans ce cas on note souvent le processus par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ où $n = \frac{t}{\tau}$ est le temps sans dimension, qui prend des valeurs entières.

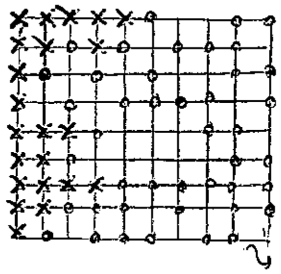
<u>Exemples :</u>

① A chaque instant $t = n\tau$ on lance une pièce de monnaie et l'on observe si elle retombe pile ou face $\rightarrow$ VAs $X_n \in \{0,1\}$ indépendantes (les résultats $X_1, \ldots, X_n$ jusqu'au tps $n\tau$ n'influent pas les résultats postérieurs $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$).
Un joueur parie chaque fois 1 €, il gagne cette somme si $X_n = 1$. La somme qu'il a gagnée depuis le début de la partie vaut au temps $n\tau$:
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$ $\longrightarrow$ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un processus stochastique
Il est facile de calculer proba $(S_n = m)$. En effet, comme les VAs sont indépendantes, la fonction caractéristique de S_n vaut (cf I).) :

$$\tilde G_n(\eta) = \langle \eta^{S_n}\rangle = \Big\langle \prod_{i=1}^n \eta^{X_i}\Big\rangle = \prod_{i=1}^n \langle \eta^{X_i}\rangle = \left(p\eta^1 + (1-p)\eta^0\right)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}(1-p)^{n-m}(p\eta)^m$$

$\Rightarrow$ proba $(S_n=m) = \begin{cases}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m} & \text{si } m=0,1,\dots,n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

(2) Les arbres d'une forêt sont distribués sur un réseau carré (cf Ex (2), I). et cours de Leonie). Un site $\vec r \in \{0,\dots,L-1\}^2 \equiv \Lambda$ est

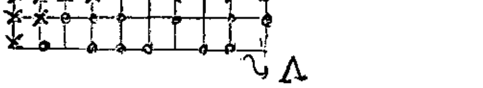


$\begin{cases} \text{soit vacant } X(\vec r)=B \text{ (blanc)} & + \\ \text{soit occupé par un arbre sain } X(\vec r)=V\text{(ert)} & \circ \\ \text{soit occupé par un arbre en feu } X(\vec r)=R\text{ (ouge)} & \times \end{cases}$

L'état $X(\vec r)$ du site $\vec r$ évolue au cours du temps.

Si l'on se donne des règles d'évolution (par ex. celles données dans le cours de Leonie) avec leurs proba. (ou les proba. par unité de tps [="taux"] si on regarde l'évolution en temps continu), ainsi que la loi de proba. de l'état initial de la forêt [par ex. proba $(X_0(\vec r)=R)=1$ si $r_1=0$ et proba $(X_0(\vec r)=R)=0$, proba $(X_0(\vec r)=V)=p$ et proba $(X_0(\vec r)=B)=1-p$ si $\vec r(r_1,r_2)\in\Lambda$, $r_1\neq 0$] alors l'état de la forêt au temps n; $X_n = (X_n(\vec r))_{\vec r\in\Lambda} \in \{B,V,R\}^\Lambda$, définit un processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb N}$.

(3) Marche aléatoire: une particule peut se déplacer sur un réseau carré infini $\mathbb Z^d$ $(d=1,2,3)$; elle occupe initialement le site $\vec X_0=\vec 0$. A chaque temps discret $t=n\tau$, elle peut sauter vers un site voisin avec une proba. $p_{\vec v}$, $\vec v\in\mathbb Z^d$, $|\vec v|=1$ (par ex. en dimension $d=1$, $p_{\mp 1}$ = proba de sauter à gauche / à droite).



La position de la particule au temps $n\tau$, $\vec X_n\in\mathbb Z^d$, définit un processus stochastique. On suppose que les déplacements $\vec\Delta_n = \vec X_n - \vec X_{n-1}$ sont des VAs indépendantes, et

---

que proba $(\vec\Delta_n=\vec v) = p_{\vec v}$ est indépendant de n (VAs identiquement distribuées)

Diffusion: Notons que $\langle X_n\rangle = \sum_{i=0}^n \langle\Delta_i\rangle = n(p-q)$ ← cas d'une marche aléatoire sur $\mathbb Z$ (dimension 1)

Si $p=q$ (ou, plus généralement pour une marche aléatoire sur $\mathbb Z^d$, si $p_{\vec v}=p_{-\vec v}$) alors $\langle\vec X_n\rangle=\vec 0$.

Dans ce cas, l'on calcule la variance de $\vec X_n$:

$$\langle(\Delta\vec X_n)^2\rangle = \langle\vec X_n^2\rangle - \langle\vec X_n\rangle^2 = \langle\vec X_n^2\rangle = \sum_{i,j=0}^n\langle\vec\Delta_i\cdot\vec\Delta_j\rangle \underset{\substack{\text{VAs } \vec\Delta_i\\ \text{indépendantes}}}{=} \underbrace{\sum_{i\neq j}\langle\vec\Delta_i\rangle\cdot\langle\vec\Delta_j\rangle}_{=\vec 0} + \underbrace{\sum_{i=0}^n\langle\vec\Delta_i^2\rangle}_{\substack{\text{indépendant de } i\\ \text{car les } \vec\Delta_i \text{ ont même}\\ \text{loi de proba}}}$$

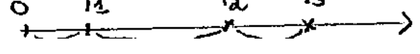
$$= n\langle\vec\Delta_i^2\rangle = D\,t$$

avec $D=\langle\vec\Delta_0^2\rangle\tau^{-1}$ = cte de diffusion.

On voit que le carré de la distance croît (en moyenne) proportionnellement au temps $t=n\tau$

Marche aléatoire en temps continu: on suppose que les sauts ont lieu à des temps aléatoires $0\le T_1\le T_2\le\dots$ Les intervalles de temps $S_n=T_{n+1}-T_n$ entre 2 sauts sont des VAs indépendantes entre elles et indépendantes des VAs de saut $\vec\Delta_n$. Les S_n ont toutes la même distribution de proba.

$\rho(s)=\tau e^{-\frac{s}{\tau}}$, $\forall s\in[0,\infty[$.



(pour $n=0$, $S_0=T_0$ est le temps du 1er saut