Licence 3, MAT354 | Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier
2011-2012

# Feuille d'exercices 3 : isométries du plan et de l'espace

*Propriétés des isométries.*

**Exercice 1.**

Soit $\mathcal{I}$ une isométrie de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$. Démontrer que :

(i) $\mathcal{I}$ est une bijection $\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$.

(ii) $\mathcal{I}$ transforme un segment en un segment;

(iii) $\mathcal{I}$ transforme une droite en une droite, un plan en un plan;

(iv) $\mathcal{I}$ transforme un secteur angulaire en un secteur angulaire de même mesure (angle non orienté);

Pour prouver certaines de ces propriétés on pourra utiliser le fait qu'une isométrie est une application affine et que son application linéaire associée conserve le produit scalaire.

*Composition d'isométries du plan.*

**Exercice 2.**

Le but de cet exercice est de déterminer la nature des transformations du plan obtenues en composant soit deux symétries axiales $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'}$ d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites du plan), soit une rotation $\mathcal{R}_O(\theta)$ et une translation $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ (où $\vec{v}$ est un vecteur du plan, $O$ un point et $\theta \in [0, 2\pi[$), soit deux rotations $\mathcal{R}_O(\theta)$ et $\mathcal{R}_{O'}(\theta')$.

1. Montrer que la composition de deux isométries est une isométrie. Que pouvez-vous en conclure sur $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{R}_O(\theta)$ et $\mathcal{R}_{O'}(\theta') \circ \mathcal{R}_O(\theta)$ ?

2. (a) Montrer que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $O$, alors $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est une rotation $\mathcal{R}_O(2\theta)$ de centre $O$ et d'angle $2\theta$, où $\theta$ est l'angle formé par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parcouru dans le sens direct.

   (b) Montrer que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles alors $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est une translation $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et tel que $\|\vec{v}\| = 2d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et $\vec{v}$ pointe de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$.

3. Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ est une droite fixée, $O$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur perpendiculaire à $\mathcal{D}$. Montrer que :

   (a) toute rotation $\mathcal{R}_O(2\theta)$ peut s'écrire comme la composée de deux symétries axiales $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'}$, où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en $O$ et forment un angle $\theta$;

   (b) toute translation $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ peut s'écrire comme la composée de deux symétries axiales $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'}$ avec $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \|\vec{v}\|/2$.

4. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{R}_O(\theta)$ et $\mathcal{R}_O(\theta) \circ \mathcal{T}_{\vec{v}}$ sont des rotations d'angle $\theta$.

5. Montrer que $\mathcal{R}_{O'}(\theta') \circ \mathcal{R}_O(\theta)$ est une translation si $\theta + \theta' = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, sinon c'est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

*Isométries et transformations affines du plan.*

**Exercice 3.**

Étant donné un système de coordonnées cartésiennes fixé du plan euclidien $\mathcal{E}_2$, on considère la transformation affine $\mathcal{I}_2 : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ de $\mathcal{E}_2$ définie par :

$$\begin{cases} x' &= y - 1 \\ y' &= x + 3\,. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{I}_2$ est un anti-déplacement de $\mathcal{E}_2$ que l'on déterminera. Tracer sur une feuille de papier millimétré les images des points $O(0,0)$, $A(0,3)$ et $B(-2,0)$ ainsi que l'image de l'axe des abscisses.

*Isométries et transformations affines de l'espace.*

**Exercice 4.**

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé associé à un système de coordonnées cartésiennes de $\mathcal{E}_3$. Soit $\Delta$ la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (1,1,0)^T$ passant par l'origine. Pour tout point $M(x,y,z) \in \mathcal{E}_3$, on note $M'(x',y',z') \in \mathcal{E}_3$ l'image de $M$ par la rotation $\mathcal{R}_\Delta(\frac{2\pi}{3})$ d'axe $\Delta$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ radians. Exprimer $(x',y',z')$ en fonction de $(x,y,z)$.

**Exercice 5.**

Étant donné un système de coordonnées cartésiennes fixé de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, on considère la transformation affine $\mathcal{I}_3 : M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ de $\mathcal{E}_3$ définie par :

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' &= \dfrac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' &= \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3\,. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{I}_3$ est un déplacement de $\mathcal{E}_3$ que l'on déterminera.

**Exercice 6.**

Étant donné un système de coordonnées cartésiennes fixé de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, on considère la transformation affine $\mathcal{J}_3 : M(x,y,z) \mapsto M'(x',y',z')$ de $\mathcal{E}_3$ définie par :

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z + 5) \\ y' &= \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z + 5) \\ z' &= \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z - 4)\,. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{J}_3$ est un anti-déplacement de $\mathcal{E}_3$ que l'on déterminera.