## Feuille d'exercices 2 : analyse vectorielle, orthogonalité et produit scalaire

**Exercice 1.**

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Montrer que deux droites perpendiculaires à $\mathcal{P}$ sont forcément parallèles. En déduire qu'il existe une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par un point $M$ donné.

**Exercice 2.**

Soit $A$ et $B$ deux points distincts et $I$ le milieu de $[A, B]$. Le plan perpendiculaire à $(AB)$ passant par $I$ est appelé le *plan médiateur* de $[A, B]$.

1. Montrer l'identité vectorielle $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$.
2. En déduire que $M$ appartient au plan médiateur de $[A, B]$ si et seulement si $d(A, M) = d(B, M)$.

**Exercice 3.**

1. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles. Montrer qu'il existe une unique droite $\Delta$ sécante à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ telle que $\mathcal{D} \perp \Delta$ et $\mathcal{D}' \perp \Delta$.
2. On considère les droites d'équations
$$\mathcal{D} \ : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + 4y + z = 5 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' \ : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = -2. \end{cases}$$
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\Delta$ de la question 1 et les coordonnées des points d'intersection $H$ et $H'$ de $\Delta$ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

**Exercice 4.** *(Théorème de Cevá).*

Soit $ABC$ un triangle non aplati. Soit $P$, $Q$ et $R$ des points de $(AB)$, $(BC)$ et $(AC)$ tels que :
$$\overrightarrow{BP} = \alpha\,\overrightarrow{AP} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \beta\,\overrightarrow{BQ} \quad , \quad \overrightarrow{AR} = \gamma\,\overrightarrow{CR} \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$
Montrer que les droites $(AQ)$, $(BR)$ et $(CP)$ sont concourantes ou parrallèles si et seulement si
$$\alpha\beta\gamma = -1 \, .$$

**Exercice 5.** *(Sujet examen 2010).*

On considère $n$ points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ et $n$ réels $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ fixés. On définit l'application
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{E} & \to \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ M & \mapsto \overrightarrow{\varphi(M)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \, . \end{cases}$$
On pose $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

1. Soit $N \in \mathcal{E}$ un point fixé. Exprimer $\overrightarrow{\varphi(M)} - \overrightarrow{\varphi(N)}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$ pour tout $M \in \mathcal{E}$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(G)} = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que si $\lambda = 0$ alors $\varphi$ est une application constante dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors
$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \lambda \overrightarrow{MG} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{E}.$$

3. On définit
$$f : \begin{cases} \mathcal{E} & \to \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2 \ . \end{cases}$$
   (a) Pour tout couple de points $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, exprimer $f(M) - f(N)$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{\varphi(N)}$.
   (b) En déduire que si $\lambda \neq 0$, alors $MG^2 = \lambda^{-1}(f(M) - f(G))$.
   (c) Déterminer suivant les valeurs du réel $k$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = k$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).
4. Soient $A$ et $B$ deux points distincts fixés de $\mathcal{E}$ et $k \geq \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = k$.
   Même question pour l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 = k$ avec $k$ un réel quelconque. On discutera le cas particulier $k = 0$.