Feuille d'exercices 1 : géométrie analytique

Changement d'origine.

Exercice 1.

Soit $(\mathcal{E}, d, \Phi)$ l'espace euclidien muni d'un système de coordonnées

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto (x_M, y_M, z_M) \end{cases} \qquad \text{tel que} \quad d(M,N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}\,.$$

Soit O' un point fixé de $\mathcal{E}$, de coordonnées $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ par rapport à Φ, et $\Phi' : M \mapsto (x'_M, y'_M, z'_M)$ le nouveau système de coordonnées défini par

$$\begin{cases} x'_M = x_M - x_{O'} \\ y'_M = y_M - y_{O'} \\ z'_M = z_M - z_{O'} \end{cases} .$$

Soient O, A, B et C (respectivement O', A', B' et C') les points de coordonnées $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ pour Φ (resp. pour Φ'). Montrer que les vecteurs de bases sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}\,.$$

En déduire que A', B' et C' sont les images de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$.

Retour sur les parallélogrammes.

Exercice 2.

Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé et non applati de l'espace euclidien. En utilisant un système de coordonnées bien choisi, redémontrer les propriétés suivantes vues en cours en MAT353 :

1. Si $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$, alors $AB = CD$ et $AD = BC$.
2. $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$ si et seulement si les diagonales $[A,C]$ et $[B,D]$ se coupent en leurs milieux.

Équations de plans et droites dans l'espace.

Exercice 3.

Soient O, P et Q trois points non alignés de l'espace euclidien. Soient $\mathcal{D} = (OP)$, $\mathcal{D}' = (PQ)$ et $\mathcal{D}'' = (OQ)$. On note $\mathcal{P}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$ le plan[1] engendré par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On choisit un système de coordonnées d'origine O tel que P est sur l'axe (Ox) et Q est dans le plan (xOy). On admettra (voir la preuve dans le cours) que le plan $\mathcal{P}_0$ engendré par les axes (Ox) et (Oy) a pour équation cartésienne $z = 0$.

1. Soit $M_0(x_0, y_0, 0)$ un point quelconque de $\mathcal{P}_0$. Si (M_0Q) n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$, déterminer les coordonnées d'un point $M \in \mathcal{D}$ tel que $M_0 \in (MQ)$. De même, montrer que si (OM_0) n'est pas parallèle à $\mathcal{D}'$, on peut trouver un point $N \in \mathcal{D}'$ tel que $M_0 \in (ON)$.
2. On suppose à présent que $M_0 \in \mathcal{P}_0$ est tel que $(M_0Q) \parallel \mathcal{D}$ et $(OM_0) \parallel \mathcal{D}'$. Déterminer les coordonnées de deux points $M \in \mathcal{D}$ et $N \in \mathcal{D}'$ tels que M_0 est le milieu de $[M, N]$.

[1] On rappelle que ce plan est par définition la réunion des droites (MN) quand M parcourt $\mathcal{D}$ et N parcourt $\mathcal{D}'$ (cf. le cours de MAT353).

3. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$.

4. Réciproquement, montrer la droite $\mathcal{D}'$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_0$ et, plus généralement, $\mathcal{P}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} \subset \mathcal{P}_0$.

5. En conclure que les quatre plans $\mathcal{P}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{D},\mathcal{D}''}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{D}',\mathcal{D}''}$ et $\mathcal{P}_0$ sont confondus.

Exercice 4.

Soit O, P et Q trois points non alignés de l'espace euclidien et $\mathcal{P}$ le plan engendré par (OP) et (PQ).

1. Écrire la transformation de coordonnées qui permet de passer du système de coordonnées initial Φ au système de coordonnées Φ_0 choisi dans l'exercice précédent.

2. En utilisant l'équation du plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ dans le système Φ_0 rappelée dans l'exercice précédent, déterminer l'équation de $\mathcal{P}$ dans le système de coordonné initial Φ.

3. Déduire de l'équation trouvée à la question 2 que $\mathcal{P}$ est l'unique plan passant par O, P et Q.

Exercice 5.

Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $Q(1,3,2)$ et $P(1/2,1,0)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2. Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

3. Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 6.

Soient $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}$ trois plans et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace euclidien. En utilisant les résultats classiques sur les systèmes d'équations linéaires à 2 et 3 inconnues, démontrer les propriétés :

(i) Si $\mathcal{P}_0$ a pour équation $a_1x + a_2y + a_3z + c = 0$ et $\mathcal{P}$ a pour équation $b_1x + b_2y + b_3z + d = 0$ avec $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$, alors

$$\mathcal{P}_0 \text{ est parallèle à } \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\mathcal{P}_0$ est parallèle à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$, alors $\mathcal{P}_0$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$.

(iii) Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_0$ est parallèle à $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$.

(iv) Si deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles au plan $\mathcal{P}_0$, alors le plan engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{P}_0$.

Intersection de cercles.

Exercice 7.

Montrer que l'intersection de deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' et de rayons R et R' contenus dans un même plan est :
– deux points si $|R - R'| < d < R + R'$ avec $d = OO'$;
– un point si $d = |R - R'|$ ou $d = R + R'$;
– vide si $d < |R - R'|$ ou $d > R + R'$;
– le cercle $\mathcal{C}$ tout entier si $d = 0$ et $R = R'$.