Feuille d'exercices 2

Médiatrices et bissectrices.

Exercice 1.

Donner les règles de construction à la règle et au compas (sans rapporteur ni équerre) de :

1. la médiatrice d'un segment $[A, B]$;
2. la perpendiculaire à une droite $\mathcal{D}$ passant par un point donné A (on distinguera les deux cas $A \in \mathcal{D}$ et $A \notin \mathcal{D}$);
3. la bissectrice d'un secteur angulaire $(\widehat{AOB})$.

Vous expliquerez dans chaque cas pourquoi ces constructions donnent les objets souhaités en vous basant sur les propriétés vues en cours.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice du segment $[A, B]$ dans le plan $\mathcal{P}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$. Montrer que :

1. M est situé dans le demi-plan de $\mathcal{P}$ de frontière $\mathcal{D}$ contenant A si et seulement si $AM \leq BM$;
2. M est situé dans le demi-plan de $\mathcal{P}$ de frontière $\mathcal{D}$ contenant B si et seulement si $AM \geq BM$.

Triangles.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle quelconque. Soit D et E les points de (BC) tels que $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{EAC} = \widehat{CBA}$. Montrer que le triangle ADE est isocèle en A.

Exercice 4.

A l'aide d'une bande adhésive, construire un triangle sur un ballon. Mesurer la somme des angles aux sommets de ce triangle avec un rapporteur. Conclusion?

Exercice 5.

Soit ABC un triangle *quelconque* non applati (c'est-à-dire tel que les points A, B et C ne sont pas alignés).

1. Tracer les médiatrices de $[B, C]$, $[A, C]$ et $[A, B]$. Vérifier puis démontrer que ces 3 médiatrices sont concourrantes en un point O.
2. Tracer les bissectrices des secteurs angulaires $(\widehat{BAC})$, $(\widehat{ABC})$ et $(\widehat{ACB})$. Vérifier puis démontrer que ces 3 bissectrices sont concourrantes en un point I.
3. Tracer les médianes issues de A, B et C. Soit I, J et K les milieux respectifs de $[B, C]$, $[A, C]$ et $[A, B]$. Soit G le point d'intersection de (BJ) et (CK) et D le point diamétralement opposé à A sur le cercle de centre G et de rayon GA.
   (a) Quel est la nature du quadrilatère $BGCD$?
   (b) En déduire que les 3 médianes du triangle ABC sont concourrantes au point G.
   (c) Montrer que $AG = \frac{2}{3}AI$, $BG = \frac{2}{3}BJ$ et $CG = \frac{2}{3}CK$.
4. Tracer les hauteurs issues de A, B et C et les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ parallèles à (BC), (AC) et (AB) passant respectivement par A, B et C. Les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ se coupent deux à deux aux points P, Q et R.

(a) Montrer que les hauteurs de ABC sont les médiatrices des segments $[P, Q]$, $[Q, R]$ et $[P, R]$.

(b) En utilisant la question 1, montrer que les 3 hauteurs du triangle ABC sont concourrantes en un point H.

Exercice 6.

Soit ABC un triangle quelconque non applati.

1. Tracer sur une même figure le centre O du cercle circonscrit, le centre de gravité G et l'orthocentre H de ABC. Que remarque-t-on?
2. Tracer sur une nouvelle figure:
   - le centre O du cercle circonscrit à ABC;
   - le point F diamétralement opposé à A sur ce cercle;
   - le point I milieu de $[B, C]$;
   - la hauteur h du triangle ABC issue de A;
   - le point d'intersection H' de (FI) et de h;
   - le point d'intersection G' de (OH') et de (AI).
3. Quel est la nature du triangle ABC si les points O et I sont confondus ?
   Montrer que, si O et I sont distincts, les droites (OI) et h sont parallèles. En déduire que I est le milieu de $[H', F]$. Montrer que cela est aussi vrai si O et I sont confondus.
4. Montrer que $H'BFC$ est un parallélogramme.
5. Montrer que (BH') et (AC) sont perpendiculaires. En déduire que $H' = H$ est l'orthocentre de ABC.
6. Montrer que $AG' = \frac{2}{3}AI$. En déduire que $G' = G$ est le centre de gravité du triangle ABC.
7. Conclusion?

Quadrilatères.

Exercice 7.

Démontrer le corollaire de la propriété du cours sur les losanges, les rectangles et les carrés.

Polygônes réguliers.

Exercice 8.

Un polygône est dit *régulier* s'il est inscriptible dans un cercle et ses côtés ont même longueur.
Tracer un pentagone régulier à l'aide d'un compas, d'une règle et d'un rapporteur.
Déterminer une méthode permettant de tracer un hexagone régulier en utilisant uniquement le compas (vous expliquerez la validité de cette construction grâce aux propriétés vues en cours).
Même question pour un pentagone.