Feuille d'exercices 1

Distances euclidienne et non euclidienne.

Exercice 1.

On suppose que l'on peut repérer de manière unique tout point M du plan euclidien $\mathcal{E}_2$ par ses coordonnées cartésiennes $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$. Deux points du plan ayant le même couple de coordonnées sont confondus (autrement dit, l'application $\Phi : M \in \mathcal{E}_2 \mapsto (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ est injective). Pour tous points M et N de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées (x_M, y_M) et (x_N, y_N), on pose :

$$d(M,N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}\ .$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathcal{E}_2$.
   Indication : pour prouver l'inégalité triangulaire, on pourra se servir de la majoration suivante (que l'on justifiera):
   $$(u+r)^2 + (v+s)^2 \leq u^2 + v^2 + r^2 + s^2 + 2\sqrt{(u^2+v^2)(r^2+s^2)}$$
   avec u, v, r et s des réels quelconques.
2. Soit $A(0,0)$ et $B(0,1)$. Déterminer les coordonnées (x,y) des points $M \in \mathcal{E}_2$ satisfaisant
   $$d(A,M) + d(M,B) = d(A,B)\,.$$
   Même question pour les points M tels que $d(A,B) + d(B,M) = d(A,M)$ et pour ceux pour lesquels $d(M,A) + d(A,B) = d(M,B)$.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que A, B et M soient alignés.
3. Montrer que si A, B et C sont alignés et si A, B et D sont alignés, alors B, C et D sont alignés.
4. Montrer qu'il passe une et une seule droite par les points A et B.
5. Sur une figure, tracer le segment $[P,Q]$ avec $P(0,3)$ et $Q(6,-6)$. Donner sans calculs les coordonnées de son (ses) point(s) d'intersection avec la droite (AB).

Exercice 2.

Pour tous points M et N de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées (x_M, y_M) et (x_N, y_N), on pose :

$$d(M,N) = \max\big\{|x_N - x_M|\,,\ |y_N - y_M|\big\}\ .$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathcal{E}_2$.
2. Soient $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$ et $D(2,0)$ quatre points de $\mathcal{E}_2$. Montrer que A, B et C sont alignés pour la distance d, de même que A, B et D, mais que B, C et D ne sont pas alignés. L'axiome d'Euclide "par deux points il passe une et une seule droite" est-il vérifié pour la distance d ?
3. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_2$ tels que $d(A,M) + d(M,C) = d(A,C)$.

Segments de droite, angles.

Exercice 3.

Soit $[A,B]$ un segment de droite, I le milieu de $[A,B]$ et M un point de (AB). Montrer que :

1. si $M \in [A,B]$ alors $MI = |MA - MB|/2$;
2. si $M \in (AB)$ est à l'extérieur du segment $[A,B]$ alors $MI = (MA + MB)/2$.

Exercice 4.

Soit A, O, A' (respectivement B, O, B') des points alignés distincts tels que $O \in [A, A']$ (resp. $O \in [B, B']$). Soit $[OI)$ la bissectrice du secteur angulaire $(\widehat{AOB})$ et $M \neq O$ un point du plan engendré par (OA) et (OB). On note α et β les angles orientés $\widehat{AOM}$ et $\widehat{MOB}$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que l'angle orienté du secteur angulaire $(\widehat{IOM})$ vaut $\widehat{IOM} = (\alpha - \beta)/2$
3. En déduire l'expression de l'angle *non orienté* de $(\widehat{IOM})$ en fonction des angles non orientés de $(\widehat{AOM})$ et de $(\widehat{MOB})$ (on discutera séparément les cas $M \in (\widehat{AOB})$, $M \in (\widehat{A'OB'})$, $M \in (\widehat{AOB'})$ et $M \in (\widehat{A'OB})$).

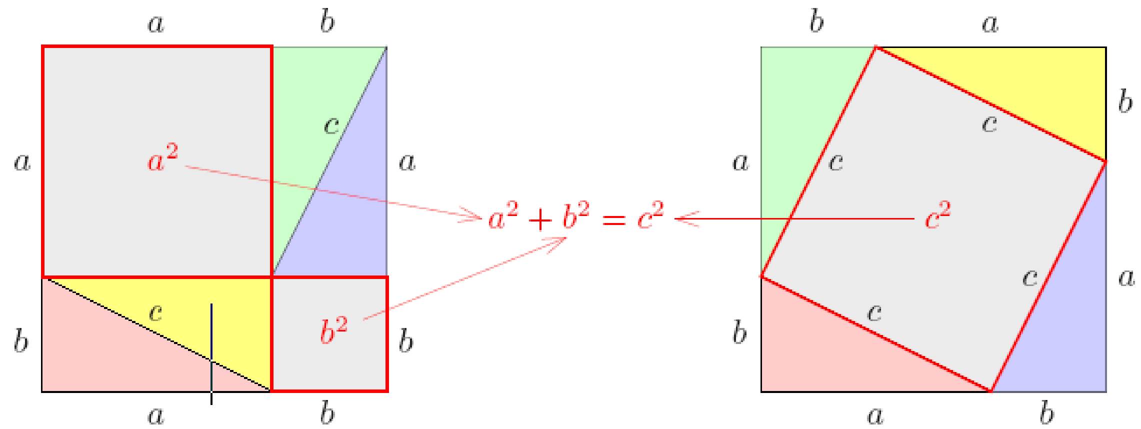
Exercice 5.

Soient (OA) et (OB) deux droites sécantes en O. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les perpendiculaires à (OA) et à (OB) passant par O. Soient $C \in \mathcal{D}$ et $D \in \mathcal{D}'$ des points distincts de O. Montrer que les secteurs angulaires $(\widehat{AOB})$ et $(\widehat{COD})$ ont même mesure ou sont supplémentaires.

Théorèmes de Pythagore, de Thales, des triangles isométriques et des triangles semblables.

Exercice 6.

Une "preuve" très classique du théorème de Pythagore est obtenue en déplaçant les pièces triangulaires et en comparant les aires dans la figure ci-dessous. Détaillez les arguments de cette preuve, qui, bien qu'elle utilise des notions non encore définies dans le cours (comme l'aire d'un carré), a l'avantage d'être à la fois visuelle et convaincante.



Exercice 7.

Construire deux triangles isométriques ABC et $A'B'C'$ tels que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$. Y a t'il une contradiction avec le théorème des triangles isométriques vu en cours ?

Exercice 8.

Démontrer le théorème des triangles semblables en utilisant le théorème des triangles isométriques (qui est moins général) et le théorème de Thales.

Exercice 9.

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. En appliquant le théorème des triangles semblables, montrer les relations:

$$AB^2 = BH \cdot BC \quad , \quad AC^2 = CH \cdot CB \quad , \quad AH^2 = BH \cdot CH \quad \text{et} \quad AB \cdot AC = AH \cdot BC \; .$$