Licence 3, MAT354 Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier
2011-2012

Examen du 20 décembre 2011

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les trois exercices sont indépendants. Durée : 2 heures.

Questions de cours :

1. Énoncez l'axiome de Pythagore-Descartes définissant un espace euclidien.

2. Rappelez la définition de l'orthogonalité de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans l'espace. Montrer que $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$ si et seulement si $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0$, où $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ sont respectivement des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ la symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$. Soit O un point de $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}_3$.

1. Montrer que si $M' = \mathcal{S}_\mathcal{D}(M)$ est l'image de M par $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ alors

$$\overrightarrow{OM'} = 2\,\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{OM}\,.$$

   Vous illustrerez cette formule sur une figure.

2. On se donne un système orthonormé de coordonnées d'origine O, qui est fixé. En appliquant la formule de la question précédente, exprimer les coordonnées (x', y', z') de $M' = \mathcal{S}_\mathcal{D}(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de M dans le cas où $\mathcal{D}$ est la droite passant par O de vecteur directeur

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R dans le plan euclidien $\mathcal{E}_2$.

1. Étant donné un point M quelconque de $\mathcal{E}_2$, soient A et B deux points distincts du cercle $\mathcal{C}$ tels que A, B et M sont alignés. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas du choix de A et est égal à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.
   Interpréter cette identité dans le cas limite où (MA) intersecte $\mathcal{C}$ en un seul point $A = B$.

2. On considère à présent deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même rayon R et de centres distincts O_1 et O_2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MA_2} \cdot \overrightarrow{MB_2}$, où $A_1 \in \mathcal{C}_1, B_1 \in \mathcal{C}_1$ et $A_2 \in \mathcal{C}_2, B_2 \in \mathcal{C}_2$ sont tels que $A_1 \neq B_1$, A_1, B_1 et M sont alignés, $A_2 \neq B_2$ et A_2, B_2 et M sont alignés.

   (Bonus) Généralisez votre résultat à des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres distincts et de rayons différents.

Exercice 3.

Dans un système orthonormé de coordonnées d'origine O de l'espace euclidien, on considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, -h)$, $D(d, 0, -h)$ et $E(0, d, -h)$ avec $d > a > 0$ et $h > 0$, et les droites $\mathcal{D} = (OC)$, $\mathcal{D}' = (AD)$ et $\mathcal{D}'' = (BE)$.

1. Déterminer les équations des droites $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ et du plan $\mathcal{P}_{\mathcal{D}',\mathcal{D}''}$ engendré par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.
2. Déterminer les coordonnées des points suivants :
   (a) I le point d'intersection de (OD) et (AC);
   (b) J le point d'intersection de (OE) et (BC);
   (c) K le point d'intersection de (AE) et (BD).
3. Soit F, G et H respectivement les points d'intersection de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ avec le plan d'équation $z = -k$, où k est un réel arbitraire tel que $k \neq -adh/(d^2 - a^2)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{FK}$ puis montrer que les trois droites (HI), (GJ) et (FK) sont concourantes en un point Q dont on déterminera les coordonnées.