Licence 3, MAT351 — Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier
2010-2011

Examen du 16 décembre, 10h-12h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les trois exercices sont indépendants. Durée : 2 heures.

Questions de cours :

1. Donner l'expression du produit scalaire en terme de la norme et son expression dans un système orthonormé de coordonnées cartésiennes.
2. Soit $\widetilde{\mathcal{I}}$ une application linéaire $\overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ de matrice A dans une base orthonormée. Montrer que $\widetilde{\mathcal{I}}$ conserve le produit scalaire si et seulement si $(A^T)A = A(A^T) = 1$.

Exercice 1.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de l'espace euclidien, de sommets distincts et de côtés respectifs parallèles (c'est-à-dire, $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$ et $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$, $(BC) \parallel (B'C')$).
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles. Que peut-on dire des triangles ABC et $A'B'C'$ si les droites sont concourantes ? Même question si elles sont parallèles.
Indication : Si (AA') et (BB') sont sécantes en un point $O \neq A$, introduire le point C'' de $[O, C)$ tel que $OC'' = kOC$ avec $k = \frac{OA'}{OA}$; prouver que $(A'C'') \parallel (A'C')$ et $(B'C'') \parallel (B'C')$; en déduire que $C'' = C'$.

Exercice 2.

On considère N points $A_1, A_2, \cdots, A_N$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ et N réels $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_N$ fixés. On définit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{E}_3 & \to \overrightarrow{\mathcal{E}_3} \\ M & \mapsto \overrightarrow{\varphi(M)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \end{cases}.$$

On pose $\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$.

1. Soit $N \in \mathcal{E}_3$ un point fixé. Exprimer $\overrightarrow{\varphi(M)} - \overrightarrow{\varphi(N)}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$ pour tout $M \in \mathcal{E}_3$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathcal{E}_3$ tel que $\overrightarrow{\varphi(G)} = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que si $\lambda = 0$ alors φ est une application constante dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors
$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \lambda \overrightarrow{MG} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{E}_3.$$
3. On définit
$$f : \begin{cases} \mathcal{E}_3 & \to \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2 \end{cases}.$$
   (a) Pour tout couple de points $(M, N) \in \mathcal{E}_3^2$, exprimer $f(M) - f(N)$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{\varphi(N)}$.
   (b) En déduire que si $\lambda \neq 0$, alors $MG^2 = \lambda^{-1}(f(M) - f(G))$.
   (c) Déterminer suivant les valeurs du réel k l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ tels que $f(M) = k$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

4. Soient A et B deux points distincts fixés de $\mathcal{E}_3$ et $k \geq \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = k$.
   Même question pour l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 = k$ avec k un réel quelconque. On discutera le cas particulier $k = 0$.

Exercice 3.

Étant donné un système de coordonnées cartésiennes fixé de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, on considère la transformation affine $\mathcal{I}_3 : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$ de $\mathcal{E}_3$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{4}(x + 3y - \sqrt{6}z + 4) \\ y' & = & \dfrac{1}{4}(3x + y + \sqrt{6}z - 2) \\ z' & = & \dfrac{1}{4}(\sqrt{6}x - \sqrt{6}y - 2z)\,. \end{array}\right.$$

Montrer que $\mathcal{I}_3$ est un déplacement de $\mathcal{E}_3$ que l'on déterminera.