Licence 3, MAT353 Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier 2012-2013

Examen du 26 octobre 2012 (durée : 2 heures)

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Barême indicatif : questions de cours (6 points), exercice 1 (6 points), exercice 2 (7 points), exercice 3 (3 points).
Les 3 exercices sont indépendants.

Questions de cours :

1. Énoncer le théorème de Thalès et sa réciproque puis démontrer la réciproque en utilisant le théorème.

2. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites coplanaires, $A \in \mathcal{D}$, $A' \in \mathcal{D}'$ et O le milieu de $[A, A']$. Soient B et B' des points appartenant respectivement à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ tels que (AA') et (BB') sont sécantes en O. On considère les angles orientés $\alpha = \widehat{OAB}$ et $\alpha' = \widehat{OA'B'}$.
Démontrer la propriété des angles alternes-internes :
$$\alpha = \alpha' \text{ si et seulement si } \mathcal{D} \text{ est parallèle à } \mathcal{D}'.$$
(On pourra utiliser sans la démontrer la propriété des angles opposés par leur sommet).

3. On définit un parallèlogramme de la façon suivante : c'est un quadrilatère non croisé ayant deux cotés opposés parallèles et de même longueur. Montrer que si $ABCD$ un quadrilatère non croisé ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallèlogramme.

Question bonus :

4. Démontrer le théorème de Pythagore en utilisant le théorème des triangles semblables (on introduira le pied H de la hauteur issue de A du triangle ABC rectangle en A, c'est-à-dire, le point d'intersection de cette hauteur avec $[B, C]$).

Exercice 1.

Soit ABC un triangle quelconque non aplati. La bissectrice du secteur angulaire $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[B, C]$ au point D.

1. En utilisant seulement la règle non graduée et le compas, tracer sur une même figure la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la droite $\mathcal{D}$ parallèle à cette bissectrice passant par C (vous laisserez les traits de compas bien visibles).

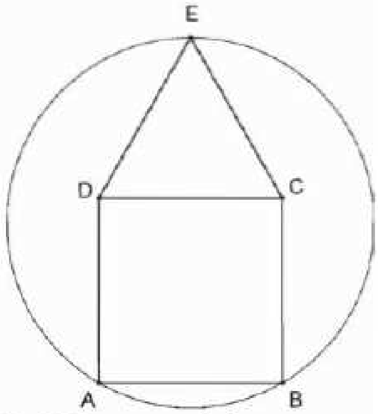
2. Prolonger le segment $[A, B]$ jusqu'au point d'intersection de (AB) et de $\mathcal{D}$, noté E. Quelle est la nature du triangle ACE ? Justifiez votre réponse.

3. Montrer que
$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}\,.$$

4. Si $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 6$ cm, déterminer exactement les longueurs BD et DC.
Décrire brièvement une manière de tracer la bissectrice du secteur angulaire $\widehat{BAC}$ en utilisant seulement une règle graduée (sans rapporteur ni compas).

Exercice 2 (extrait du concours de recrutement PE, session 2009).

On considère la figure ci-contre constituée d'un cercle Γ passant par les sommets A et B d'un carré ABCD de côté *a* et par le sommet E d'un triangle équilatéral EDC extérieur au carré.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le rayon et le centre O du cercle Γ.



1) Soit A' le point d'intersection, autre que A, du cercle et de la droite (AD). Démontrer que les points A', O et B sont alignés.

2) Soit Δ la médiatrice du segment [AB].
   a) Démontrer que le point E appartient à la droite Δ.
   b) Proposer une méthode de construction de la droite Δ utilisant uniquement la règle non graduée.
   c) Démontrer que le point O appartient à la droite Δ.
   d) Proposer une méthode de construction du point O utilisant uniquement la règle non graduée.

3) Quelle est la nature des triangles EDA et EOA ? En déduire que $\widehat{DAO} = 30°$.

4) Quelle est la nature du triangle AOB ? En déduire la longueur du rayon du cercle.

Exercice 3 (extrait du concours de recrutement PE, session 2011).

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse (une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point) :

"Le triangle *ABC* ci-dessous est rectangle en *A*."