Licence 3, MAT353 | Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier 2011-2012

Examen du 3 novembre 2011 (durée : 2 heures)

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Barême indicatif : questions de cours 5 points, exercice 5 points, problème 10 points.
L'exercice et le problème sont indépendants.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un segment de droite à partir de la notion de distance.
2. Donner l'énoncé précis de la propriété reliant un angle inscrit $\widehat{AMC}$ à l'angle au centre $\widehat{AOC}$ avec A, C et M des points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. En utilisant cette propriété montrer que, si $[A, B]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et M un point du plan contenant $\mathcal{C}$, on a $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(MA)\perp(MB)$.
3. Rappeler la définition de la distance $d(M, \mathcal{D})$ d'un point M à une droite $\mathcal{D}$. Démontrer que si un point M est sur la bissectrice d'un secteur angulaire $(\widehat{CAB})$, alors $d(M,(AB)) = d(M,(AC))$ (vous mentionnerez clairement chaque autre résultat du cours utilisé dans votre démonstration).

Exercice.

Soit ABC un triangle quelconque non applati (c'est-à-dire tel que les points A, B et C ne sont pas alignés). Soit I et J les milieux respectifs de $[A, C]$ et de $[B, C]$. Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à (BC) passant par I et $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à (IB) passant par C.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point E.
2. Soit D le milieu de $[I, E]$. Montrer que la droite (DC) est parallèle à (IJ).

Problème (extrait du sujet "zéro" du concours de recrutement PE 2011).

L'objet de ce problème est la construction, par deux méthodes différentes, du point I d'un segment [AB] donné, tel que $\frac{IA}{IB} = 2$.

Partie A : première méthode de construction du point I

On considère une demi-droite d'origine A, et un point B de cette demi-droite, distinct de A.

1. Montrer que si I est un point du segment [AB] distinct de A et de B, alors la condition $\frac{IA}{IB}=2$ est équivalente à la condition $\frac{AI}{AB}=\frac{2}{3}$.
2. Ecrire un programme de construction du point I à la règle non graduée et au compas, utilisant le théorème de Thalès.
3. Faire une figure avec AB=10 cm.
4. Justifier la construction du point I.

Partie B : Deuxième méthode de construction du point I, dans un cas particulier.

1. Un segment [AB] de longueur 10 cm étant donné, peut-on construire un point C tel que AC = 8 cm et BC = 4 cm ? justifier.

   Faire une figure, qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe le segment [AB] en J.

Tracer cette bissectrice à la règle et au compas. Laisser apparents les traits de construction.

Le but des question suivantes est de montrer que le point J est tel que $\frac{JA}{JB}=2$.

La parallèle à la droite (CJ) passant par B coupe la demi-droite $[A,C)$ en M.

3. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{BCM}$ est perpendiculaire à la droite (CJ).
4. Montrer que le triangle BCM est isocèle.
5. Déterminer $\frac{AJ}{AB}$ et conclure.