Licence 3, MAT351 Centre Drôme-Ardèche, université Joseph Fourier
2010-2011

Devoir surveillé du 2 novembre, 16h-18h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. L'exercice et le problème sont indépendants.
Durée : 2 heures.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une distance.
2. Rappeler la définition de la longueur d'une courbe. En vous basant sur cette définition, montrer que la longueur d'un arc de cercle de rayon R est proportionnelle à R.
3. Soit ABC un triangle isocèle en A. Démontrer en utilisant le théorème des triangles isométriques que la médiane issue de A, la hauteur issue de A, la médiatrice de $[B, C]$ et la bissectrice du secteur angulaire $\widehat{BAC}$ (prolongée de part et d'autre de A en une droite) sont confondues. Vous admettrez sans le justifier que, étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un point $A \notin \mathcal{D}$, il existe une et une seule droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A).

Exercice 1.

Soit $ABCD$ un quadrilatère planaire quelconque. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$ de $ABCD$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifiez votre réponse.
   Indication : on pourra prouver que (IJ) et (KL) sont parallèles à une même droite.
3. Soient P et Q les milieux de $[A, C]$ et $[B, D]$. Quelle est la nature du quadrilatère $PJQL$? Justifiez votre réponse.
4. Montrer que les droites (PQ), (IK) et (JL) sont concourrantes.

Problème.

PARTIE I : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe du plan euclidien. On note α, β, γ et δ les mesures en radians des secteurs angulaires $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \notin \{0, \pi\}$, de sorte que le quadrilatère ne possède pas trois sommets alignés.
On dit que $ABCD$ est *inscriptible dans un cercle* s'il existe un cercle passant par A, B, C et D.

1. Montrer que si $ABCD$ est inscriptible dans un cercle, alors $\gamma = \pi - \alpha$ et $\delta = \pi - \beta$.
2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan contenant $\mathcal{C}$, sécantes en un point M n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. On note E et F (respectivement E' et F') les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$). Soient $\widehat{EME'}$ et $\widehat{FMF'}$ les secteurs angulaires de sommet M délimités par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, supposés soit opposés (si M est à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$), soit confondus (si M est à l'extérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$).

   (a) On prend M à l'intérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$. Montrer que

   $$\text{mes}(\widehat{EME'}) = \frac{1}{2}\text{mes}(\widehat{FOF'}) + \frac{1}{2}\text{mes}(\widehat{EOE'})$$

   où les secteurs angulaires $\widehat{FOF'}$ et $\widehat{EOE'}$ sont choisis de telle sorte que $\widehat{FOF'} \cap \mathcal{C} = \widehat{FMF'} \cap \mathcal{C}$ et $\widehat{EOE'} \cap \mathcal{C} = \widehat{EME'} \cap \mathcal{C}$.

(b) On suppose à présent que M est situé à l'extérieur du disque de frontière $\mathcal{C}$. Montrer que si $E \in [M, F]$ et $E' \in [M, F']$, alors

$$\mathrm{mes}(\widehat{EME'}) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\widehat{FOF'}) - \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\widehat{EOE'})$$

avec les mêmes conventions que précédemment pour $\widehat{FOF'}$ et $\widehat{EOE'}$.

3. Déduire des questions précédentes que

le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle $\Leftrightarrow$ $\delta = \pi - \beta$ $\Leftrightarrow$ $\gamma = \pi - \alpha$.

Indication : $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

PARTIE II : Soit ABC un triangle non applati. On rappelle que le *projeté orthogonal* d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. Étant donné un point D quelconque contenu dans le secteur angulaire $\widehat{ABC}$, on construit les projetés orthogonaux de D sur (AB), (BC) et (CD), que l'on note H, K et L.

1. Faire une figure en plaçant D sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Que constatez-vous ?
2. En utilisant la question 2 de la partie I, montrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre $[F, F']$ et M un point du plan contenant $\mathcal{C}$ tel que (FM) est perpendiculaire à $(F'M)$, alors $M \in \mathcal{C}$.
3. On suppose que le point D du secteur angulaire $\widehat{ABC}$ n'est pas situé à l'intérieur du triangle ABC et son projeté orthogonal L appartient au segment $[A, C]$.
   Montrer que H et L sont sur le cercle de diamètre $[A, D]$. En déduire que
   $$\mathrm{mes}(\widehat{DLH}) = (\pi - \alpha) \ \text{ rad .}$$
4. Montrer que
   $$\mathrm{mes}(\widehat{DLK}) = (\pi - \gamma) \ \text{ rad .}$$
5. En utilisant le résultat de la Partie I, montrer que D est sur le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si H, K et L sont alignés.