4 Polynômes

Exercice 1. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Montrer que les polynômes $P_0(x) = x^3 + x^2 + 1$ et $P_1(x) = x^2 - 1$ sont premiers entre eux. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide des polynômes U et V tels que $P_0U + P_1V = 1$.

Exercice 2. Décomposition en éléments simples d'une fonction fraction rationnelle.

1. Soit $P_0(x) = x^2 - 1$ et $P_1(x) = x - 2$. Montrer que P_0 et P_1 sont premiers entre eux et déterminer des polynômes U et V tels que $P_0U + P_1V = 1$.
2. Montrer que $P_0(x)$ et $P_0'(x)$ sont premiers entre eux et déterminer des polynômes W et Z tels que $P_0W + P_0'Z = 1$.
3. Déduire des questions 1 et 2 la décomposition en éléments simples de
$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2(x-2)} .$$
4. Déterminer une primitive de f.
5. Déterminer le développement en série entière en 0 de $f(x)$.

Exercice 3. Algorithme de Sturm. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Sturm le nombre de racines réelles de $P(x) = x^3 - 3x$ dans les intervalles suivants : $I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 1]$ et $I_3 = [1, 2]$.

Exercice 4. Calcul approché des racines d'un polynôme. Peut-on appliquer la méthode de Newton pour déterminer des valeurs approchées des racines des polynômes suivants ?

1. $R(x) = x^2 + 10^{-8}$
2. $P_\lambda(x) = x^3 - 3x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $Q(x) = x^3$.

Si oui, donner pour chaque racine un domaine de valeurs initiales u_0 telles que la suite itérée de Newton $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la racine cherchée (pour P_λ, discuter les différents cas de figure suivant les valeurs de λ).

Exercice 5. Systèmes d'équations non linéaires

1. Soit P et Q deux polynômes. Montrer que le système
$$\begin{cases} P(x) &= 0 \\ Q(x) &= 0 \end{cases} \tag{1}$$
est équivalent à $PGCD(P, Q)(x) = 0$. En déduire que (1) admet une solution si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Dans ce cas, comment sont reliés le nombre de solutions et le degré de $PGCD(P, Q)$?
2. Soit $P(x) = x^3 + \gamma$ et $Q(x) = x^2 + \alpha$ avec α et $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 \neq 0$.
Indication : utiliser l'identité de Bézout $PGCD(P, Q) = PU + QV$ avec $U(x) = ax + b$ et $V(x) = cx^2 + dx + e$, puis écrire un système linéaire à 5 équations pour a, b, c, d et e.
3. En déduire que (1) admet une solution (dans $\mathbb{C}$) si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 = 0$. Déterminer dans ce cas les solutions.

5 Intégration numérique

Exercice 6. Calcul approché d'une intégrale. Calculer les sommes finies

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} i^3$$

(on pourra utiliser la formule de somme d'Euler-MacLaurin). En déduire une approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$$

en utilisant

1. la méthode des rectangles à gauche
2. la méthode du point milieu

pour un pas $h = 1/N$. Comparer la valeur approchée avec la valeur exacte dans les deux cas. Quelle est la méthode la plus précise ?

Exercice 7. Précision de la méthode des trapèzes. Soit f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ qui s'annule en dehors d'un intervalle borné $[a, b]$. Montrer que la méthode des trapèzes permet de calculer l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

avec une précision d'ordre $1/N^2$.
Indication : utiliser la formule de somme d'Euler-MacLaurin.

Exercice 8. Méthodes de Newton-Cotes. La méthode de Newton-Cotes d'ordre n et de pas $h = b-a$ consiste à évaluer l'intégrale (2) en remplaçant f par son polynôme interpolateur de Lagrange aux points $x_i = a + hi/n$, $i = 0, \cdots, n$, donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \quad , \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,. \tag{3}$$

On obtient ainsi une valeur approchée

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \omega_i^{(n)}$$

de $I(f)$. Calculer les coefficients $\omega_i^{(n)}$ pour $n = 2$ et pour $n = 3$.
Indication : Au lieu de calculer les intégrales $\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x$, on pourra remarquer que $I(f) = I_n(f)$ si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n (dans ce cas, f est égal à son polynôme interpolateur).