Partiel du 10 mars 2016 de 13h30 à 15h30

Les notes et polycopiés de cours, de TD et de TP sont autorisés. Les ordinateurs portables déconnectés du réseau internet sont autorisés.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. Développements binaires, nombres flottants et séries.

1. Écrire le nombre rationnel 1/3 comme un nombre à virgule en base 2.
2. Donner la mantisse et l'exposant du nombre 1/3 encodé comme un nombre à virgule flottante au format double précision (mantisse de 52 bits).
3. Calculer la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}$. Y-a-t'il un rapport avec la question 1 ?

Exercice 2. Erreurs d'arrondis.

1. Comparer $f(x) = 1 + \exp(2x) - 2\exp(x)$ et $g(x) = (\exp(x) - 1)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Comparer les valeurs approchées de $f(x)$ et de $g(x)$ obtenues sur `xcas` pour $x = 10^{-n}$ avec $n = 7, 8, 9$ et 10, en fixant la précision avec la commande `Digits:=16` puis en effectuant les calculs en mode approché (remplacer 1 par 1.0). Que constatez-vous ?
   Refaire les calculs en augmentant la précision (par exemple avec `Digits:=30`). Que constatez-vous ?
3. Expliquez vos résultats de la question 2. Lesquels des deux valeurs approchées de $f(x)$ et de $g(x)$ vous semblent-elles les plus précises ?

Exercice 3. Méthodes du point fixe et de Newton.

Dans cet exercice, on voudrait résoudre l'équation

$$\sin(x^2) + \frac{1}{6} = x \quad , \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \tag{1}$$

par la méthode du point fixe puis par la méthode de Newton. On pose :

$$f(x) = \sin(x^2) + \frac{1}{6} \, .$$

1. *Méthode du point fixe.*
   (a) Calculer la dérivée f' de f. Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $I = [0, \frac{1}{3}]$.
   En déduire que l'équation (1) admet une unique solution $x = \ell$ et que si $u_0 \in I$, la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ quand $n \to \infty$.
   (b) Donner une majoration de l'erreur $|u_n - \ell|$ en fonction de $|u_0 - \ell|$. On choisit $u_0 = 0$. Pour quelle valeur de n peut-on être sûr que $|u_n - \ell| \leq 10^{-2}$? Déterminer l'encadrement correspondant de ℓ.
2. *Méthode de Newton.*
   On réécrit l'équation (1) sous la forme $g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - x$.
   (a) On applique la méthode de Newton pour résoudre l'équation (1), on construit donc une suite récurrente $v_{n+1} = h(v_n)$. Déterminer la fonction h.

(b) Calculer $g''(x)$ et déterminer son signe sur $[0, 1/3]$.
Indication : on pourra montrer que $\cos(x^2) \geq \cos(1/9)$ et $-x^2 \sin(x^2) \geq -1/9 \sin(1/9)$ si $x \in [0, 1/3]$.

(c) Donner une valeur de v_0 telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On justifiera la convergence en montrant que les hypothèses de l'un des théorèmes du cours sont vérifiées.

(d) Donner une majoration de $|v_n - \ell|$ en fonction de $|g(v_n)|$.

(e) Calculer v_4 pour une valeur de v_0 déterminée à la question 2(c). Donner une majoration de $|v_4 - \ell|$ et l'encadrement correspondant de ℓ.