Partiel du 10 mars 2015 de 12h30 à 14h30

Les notes et polycopiés de cours, de TD et de TP sont autorisés. Les ordinateurs portables déconnectés du réseau internet sont autorisés.

Le sujet comporte 3 exercices (feuille recto-verso) indépendants.

Exercice 1. Erreurs d'arrondis.

1. Calculer sur Xcas les valeurs du polynôme $p(x) = (x-1)^9$ pour $x = x_j = 0.999 + j * 0.0001$, où j est un entier allant de 0 à 10, des deux manières différentes suivantes :
   (a) en fixant la précision de Xcas par la commande `Digits:=30;` puis en utilisant la forme factorisée de p : `p(x):=(x-1)^9;seq(p(0.999+j*0.0001),j,0,10);`
   (b) avec la même précision, en remplaçant $p(x)$ dans la ligne de commandes ci-dessus par sa forme développée $q(x)$ (obtenue par `q:=expand(p);`).

   Comparez les valeurs obtenues (il n'est pas nécesaire de les écrire sur votre copie!) et commentez vos résultats. Laquelle des deux méthodes vous paraît-elle la plus fiable ?
2. Écrire sur votre copie une commande Xcas permettant de trouver les valeurs exactes de $p(x_j)$. Comparer ces valeurs exactes avec celles obtenues par les méthodes (a) et (b) de la question 1.
3. Calculer sur Xcas les erreurs relatives $|q(x_j) - p(x_j)|/|p(x_j)|$ pour $j = 0, 1, \dots, 9$. Comment ces erreurs varient-elles avec j ? Commentez vos résultats.
   Vous pouvez modifier la précision de Xcas en fixant une valeur différente de 30 pour la variable `Digits`. Donner, si cela est possible, la plus petite valeur de `Digits` telle que les erreurs relatives soient inférieures à 10^{-3} pour tout $j \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
4. **(Question bonus)** Soient $b_0(x_j)$ les valeurs de $p(x_j)$ obtenues grâce à l'algorithme de Horner. En utilisant la fonction `horn` du TP2, déterminer les erreurs relatives $|b_0(x_j) - p(x_j)|/|p(x_j)|$ pour `Digits:=30`. Que constatez-vous?

Exercice 2. Méthode du point fixe.

On considère la fonction polynôme

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \, .$$

1. Calculer et factoriser la dérivée f' de f. Donner le tableau de variation de f sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que $|f'(x)| \leq 4/9$ pour tout $x \in [-1, 0]$.
3. Montrer que f satisfait les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $I = [-1, 0]$. En déduire que f admet un unique point fixe ℓ dans I et que si $u_0 \in I$, la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ quand $n \to \infty$.
4. Déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près en prenant $u_0 = -0.5$ (donner une condition sur $|u_{n+1} - u_n|$ pour que l'erreur absolue soit inférieure à 10^{-6}, puis utiliser par exemple la fonction `iter` du TP1 ou bien le tableur de Xcas). Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour obtenir ℓ avec cette précision?

Exercice 3. Valeur approchée de $\ln 2$.

1. Calculer les dérivées successives de $\ln(1-x)$ en $x=0$. En déduire que le développement de Taylor de $\ln(1-x)$ en $x=0$ à l'ordre n est

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta)^{n+1}} \quad , \quad -1 < x < 1 \, , \tag{1}$$

où θ est un réel dépendant de x compris entre 0 et x. Dans la suite, on pose

$$T_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \, .$$

2. Soit $0 \leq x \leq 1/2$. Déterminer en utilisant la formule de Taylor (1) une majoration de la valeur absolue du reste $R_n(x) = \ln(1-x) - T_n(x)$ en fonction de n. En déduire les valeurs de n pour lesquelles on est certain que $T_n(x)$ soit une valeur approchée de $\ln(1-x)$ à 10^{-1} près (c'est-à-dire, avec une erreur absolue inférieure à 10^{-1}).

3. Montrer que $T_n(x) > \ln(1-x)$ si $0 < x < 1$. Donner une valeur approchée u_0 de $-\ln 2$ à 10^{-1} près telle que $u_0 > -\ln 2$.

4. Soit $x < 1$. On définit la suite itérée

$$u_{n+1} = u_n - \frac{e^{u_n} - 1 + x}{e^{u_n}} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

Montrer que si $u_0 > \ln(1-x)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\ln(1-x)$.

5. Déterminer u_2 pour $x = 1/2$ en prenant pour valeur initiale la valeur approchée u_0 déterminée à la question 3. Donner une estimation théorique de l'erreur absolue ε. En déduire un encadrement de $\ln 2$ par deux nombres décimaux de différence ε.