Examen du 26 mai 2015

Les notes et polycopiés de cours, de TD et de TP sont autorisés. Les ordinateurs portables déconnectés du réseau internet sont autorisés.
Durée: 3 heures

Le sujet comporte 3 exercices (feuille recto-verso) indépendants.

Exercice 1. Méthode du point fixe.
On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{2} .$$

1. Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que f admet un unique point fixe ℓ dans $[0, 1]$ et que si $u_0 \in [0, 1]$, la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ quand $n \to \infty$.

2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 pour $u_0 = 0$.

3. Donner une majoration de l'erreur $|u_n - \ell|$ en fonction de $|u_{n+1} - u_n|$. Pour quelle valeur de n peut-on être sûr que $|u_n - \ell| \leq 10^{-2}$? Déterminer l'encadrement correspondant de ℓ.

Exercice 2. Méthode de Newton.
On voudrait déterminer le maximum sur l'intervalle $[-4, 0]$ de la fonction polynôme

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 15x^2 - 24x + 1 .$$

1. Calculer les dérivées première et seconde f' et f'' de f et donner le tableau de variation de $g = f'$.

2. Montrer que g a deux racines distinctes dans l'intervalle $[-4, 0]$. Laquelle de ces deux racines correspond-elle au maximum de f? Dans la suite, on notera $r_{\max}$ cette racine.
Montrer que $r_{\max} \in [-1, 0]$.

3. Donner une valeur initiale u_0 de la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Newton convergeant vers la racine $r_{\max}$ de g. Vous justifierez votre réponse à l'aide d'un théorème du cours.

4. Déterminer une valeur approchée u_4 de $r_{\max}$ en faisant 4 itérations.

5. Donner un encadrement de $u_4 - r_{\max}$ en fonction de $g(u_4)$ et $g'(r_{\max})$.
Montrer que $g'(r_{\max}) \leq g'(-1)$, en déduire que $g(u_4)/g'(r_{\max}) \leq g(u_4)/g'(-1)$.

6. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $r_{\max}$. Quelle est l'erreur absolue?

7. Déterminer une valeur approchée du maximum de f sur l'intervalle $[-4, 0]$. Pouvez-vous estimer l'erreur sur ce maximum?

Exercice 3. Développement en série et méthode du point milieu.
Le but de cet exercice est de trouver des valeurs approchées de la fonction de Bessel d'ordre 0 donnée par l'intégrale

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t .$$

1. On se propose d'approximer $J_0(x)$ par les n premiers termes de son développement en série entière. Pour cela, il faut déterminer ce développement et une majoration du reste afin de contrôler l'erreur.

   (a) Rappeler le développement en série entière de $\cos(u)$ en $u = 0$. Quel est son rayon de convergence?

   (b) En déduire que le développement en série entière de $J_0(x)$ en $x = 0$ est
$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p\, x^{2p} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ , avec } a_p = \frac{1}{\pi(2p)!}\int_0^{\pi}(\sin t)^{2p}\mathrm{d}t\ .$$

   (c) Vous admettrez dans un premier temps que $a_p = 1/(2^p p!)^2$ pour tout entier $p \geq 0$. Déterminer le développement de $J_0(x)$ en $x = 0$ jusqu'à l'ordre $2n$ inclu, que vous noterez $S_{2n}(x)$. Montrer que le reste $R_{2n}(x) = J_0(x) - S_{2n}(x)$ est une série alternée si $n \geq |x|/2$. En déduire une majoration de $|R_{2n}(x)|$.

   (d) On prend $x = 1$. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $S_{2n}(1)$ approche $J_0(1)$ avec une précision de 10^{-8} (c'est-à-dire, $|R_{2n}(1)| \leq 10^{-8}$)? Donner l'encadrement correspondant de $J_0(1)$.

   (e) On prend $x = 10$. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $S_{2n}(10)$ approche $J_0(10)$ avec une précision de 10^{-8}? Donner l'encadrement correspondant de $J_0(10)$.

2. On veut à présent calculer des valeurs approchées de $J_0(1)$ et $J_0(10)$ par la méthode du point milieu avec un pas constant $h = \pi/n$. On note respectivement $I_n(1)$ et $I_n(10)$ ces valeurs approchées.

   (a) On pose $f(t) = \cos(\sin t)$. Calculer la dérivée seconde f'' de f et trouver une majoration de $M_2 = \sup_{t\in[0,\pi]} |f''(t)|$.

   (b) Donner une majoration de l'erreur $|J_0(1) - I_n(1)|$. Déterminer le plus petit entier positif n tel que cette erreur soit inférieure à 10^{-8} et calculer la valeur correspondante de $I_n(1)$.

   (c) De même, déterminer le plus petit entier positif n tel que $|J_0(10) - I_n(10)| \leq 10^{-8}$ et la valeur correspondante de $I_n(10)$.

   (d) Laquelle des deux méthodes (développement en série de la question 1 ou point milieu de la question 2) vous paraît-elle plus efficace pour calculer $J_0(1)$? Même question pour $J_0(10)$.

3. **Question bonus :** En utilisant la formule $(\sin t)^{2p} = (1 - \cos^2(t))(\sin t)^{2p-2}$ et une intégration par parties, montrer que pour tout entier $p \geq 1$,
$$\int_0^{\pi}(\sin t)^{2p}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(\sin t)^{2p-2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2p-1}\int_0^{\pi}(\sin t)^{2p}\mathrm{d}t\ .$$
En déduire que le coefficient de la série entière de la question 1(b) vérifie $a_p = a_{p-1}/(2p)^2$ pour tout $p \geq 1$. En conclure que $a_p = 1/(2^p p!)^2$ pour tout entier $p \geq 0$.