Examen du 30 juin 2015 (seconde session)

Les notes et polycopiés de cours, de TD et de TP sont autorisés. Les ordinateurs portables déconnectés du réseau internet sont autorisés.
Durée: 3 heures

Le sujet comporte 3 exercices (feuille recto-verso) indépendants.

Exercice 1. Calculs exacts et approchés.

1. Comparer les valeurs obtenues sur xcas en calcul exact et en calcul approché de
$$A = \sqrt{10^{11}+1} - \sqrt{10^{11}} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1} + \sqrt{10^{11}}}\ .$$
2. Montrer par un calcul que $A = B$.
3. En calcul approché, laquelle des deux valeurs obtenues à la question 1 vous paraît-elle plus proche de la valeur exacte $A = B$? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Méthodes du point fixe et de Newton.

Dans cet exercice, on voudrait résoudre l'équation
$$\sin(x^2) + \frac{1}{6} = x \quad , \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \tag{1}$$
par la méthode du point fixe puis par la méthode de Newton. On pose :
$$f(x) = \sin(x^2) + \frac{1}{6}\ .$$

1. *Méthode du point fixe.*
   (a) Calculer la dérivée f' de f. Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $I = [0, \frac{1}{3}]$.
   En déduire que l'équation (1) admet une unique solution $x = \ell$ et que si $u_0 \in I$, la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ quand $n \to \infty$.
   (b) Donner une majoration de l'erreur $|u_n - \ell|$ en fonction de $|u_0 - \ell|$. On choisit $u_0 = 0$. Pour quelle valeur de n peut-on être sûr que $|u_n - \ell| \leq 10^{-2}$? Déterminer l'encadrement correspondant de ℓ.
2. *Méthode de Newton.*
   On réécrit l'équation (1) sous la forme $g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - x$.
   (a) On applique la méthode de Newton pour résoudre l'équation (1), on construit donc une suite récurrente $v_{n+1} = h(v_n)$. Déterminer la fonction h.
   (b) Calculer $g''(x)$ et déterminer son signe sur $[0, 1/3]$.
   Indication : on pourra montrer que $\cos(x^2) \geq \cos(1/9)$ et $-x^2\sin(x^2) \geq -1/9\sin(1/9)$ si $x \in [0, 1/3]$.
   (c) Donner une valeur de v_0 telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On justifiera la convergence en montrant que les hypothèses de l'un des théorèmes du cours sont vérifiées.
   (d) Donner une majoration de $|v_2 - \ell|$ en fonction de $g(v_2)$.
   (e) Calculer v_2 pour une valeur de v_0 déterminée à la question 2(c). Donner l'encadrement correspondant de ℓ.

Exercice 3. Développements en séries.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

Dans cet exercice, on veut calculer une valeur approchée de $F(x)$.

1. Donner le développement en série entière de f. En déduire celui de F.
2. Soit $T_n(x)$ le développement de Taylor de F en $x = 0$ jusqu'à l'ordre n inclu et $R_n(x) = F(x) - T_n(x)$ le reste. Donner une majoration de $|R_n(x)|$ en fonction de x et de n pour $|x| \leq 5$.
3. Déterminer le plus petit entier positif n tel que $|R_n(1)| < 10^{-7}$.
4. En déduire une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-7} près.
5. Montrer que pour l'entier n déterminé à la question 3, $T_n(x)$ est une valeur approchée de $F(x)$ à 10^{-7} près pour tout $x \in [-1, 1]$. Est-ce toujours le cas pour $x = 3$?