**2ième contrôle de TP, groupe MAT, 26 avril 2016**

**Exercice 1. Développements en séries entières.**

On veut approcher $f(y) = \cos(\sqrt{y})$ en utilisant des développements en séries entières.

1. Donner le développement en série entière de $f(y)$ en $y = 0$.

2. On note $T_n(y)$ la somme des $n$ premiers termes de cette série. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $|T_n(y) - f(y)| \leq 10^{-6}$ pour tout $y$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Même question pour l'intervalle $[0, 1000]$. Que constatez-vous?

3. Trouver une fonction convexe $g_y$ dépendant de $y$ admettant $\sqrt{y}$ comme racine. Montrer que la suite itérée de Newton $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $g_y$ est décroissante et converge vers $\sqrt{y}$ pour des valeurs initiales $u_0$ que vous spécifierez.

4. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $f(y)$ pour tout $y \in [0, 1000]$ en effectuant successivement les étapes suivantes :

   (a) on détermine une valeur approchée $\theta = u_N$ de $\sqrt{y}$ par la méthode de Newton (dans un premier temps, vous pourrez prendre $N = 10$ itérations);

   (b) on soustrait à $\theta$ un multiple entier de $\pi$ (obtenu par arrondi de $\theta/\pi$) pour se ramener à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (on rappelle que $\cos\theta = (-1)^k \cos(\theta - k\pi)$);

   (c) on remplace $\theta$ par $|\theta|$;

   (d) on approxime $\cos\theta$ en utilisant le développement en série du cosinus si $\theta \in [0, \pi/4]$ et le développement en série du sinus si $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ (on rappelle que $\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$).

5. Déterminez le nombre de termes qu'il faut sommer dans les séries entières pour être sûr que l'erreur commise à l'étape (d) soit inférieure à $0.5 \times 10^{-6}$.

6. Faire afficher la différence sur l'intervalle $[0, 1000]$ entre les valeurs approchées calculées par votre programme et la fonction $\cos(\sqrt{y})$ déjà implémentée dans Xcas. Même question en utilisant le développement en série de la question 1.

7. **Bonus :** Montrer que $|\cos\theta - \cos\theta_0| \leq |\theta - \theta_0|$ pour tout $\theta, \theta_0 \in \mathbb{R}$. En déduire une majoration de $|f(y) - \cos\theta|$ en fonction de $\sqrt{y} - \theta$. Ajouter dans votre programme une condition assurant que l'erreur commise à l'étape (a), $|f(y) - \cos\theta|$, soit inférieure à $0.5 \times 10^{-6}$. Que pouvez-vous en conclure sur la précision sur la valeur de $f(y)$ de votre programme?

**Exercice 2. Racines complexes d'un polynôme.**

1. Écrire un programme calculant des valeurs approchées de toutes les racines complexes d'un polynôme $\mathcal{P}$ par la méthode de Newton. On prendra comme valeur initiale $u_0$ de la suite de Newton un nombre complexe aléatoire dans $\{z \in \mathbb{C}; -100 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 100, -100 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 100\}$. Pour obtenir toutes les racines, on éliminera successivement les racines $r$ trouvées précédemment en effectuant la division euclidienne par $x - r_{\text{app}}$, où $r_{\text{app}}$ est la valeur approchée de $r$ donnée par la méthode de Newton. Expliquez l'intérêt d'effectuer cette division et pourquoi les racines approchées du polynôme quotient donnent des approximations des racines de $\mathcal{P}$.

2. Ajoutez un test dans votre programme pour être sûr que le polynôme n'a que des racines simples. Quelle est l'intérêt de ce test?

**Exercice 3. Intégration numérique.**

1. Écrire un programme prenant en arguments une fonction $f$, des réels $a$ et $b$ avec $a < b$ et un entier positif $N$ et retournant la valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ obtenue par :

(a) la méthode des rectangles à gauche
(b) la méthode du point milieu
(c) la méthode des trapèzes

avec un pas $h = (b - a)/N$.

2. Comparer la précision des méthodes ci-dessus en prenant $f(x) = x$ puis $f(x) = x^2$. Vous déterminerez pour ces deux fonctions la différence entre les valeurs approchées et la valeur exacte de $I$ pour différentes valeurs de $N$. Commentez vos résultats.

**Corrigé du 2ième contrôle de TP, groupe MAT**

**Exercice 1 :**

1. Le développement de $f(y)$ s'obtient en remplaçant $x$ par $\sqrt{y}$ dans le développement du cosinus,
$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{y^k}{(2k)!} = T_n(y) + R_n(y) \quad , \quad T_n(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{y^k}{(2k)!} \, . \tag{1}$$

2. La série est alternée à partir d'un certain rang. En effet, ses termes sont de la forme $(-1)^k u_k$ avec $0 \leq u_k = y^k/(2k)! \to 0$ quand $k \to \infty$ et $(u_k)_{k \geq k_0}$ est décroissante, où $k_0$ est le plus petit entier supérieur à $\sqrt{y}/2$ (car $u_{k+1}/u_k = y(2k+2)^{-1}(2k+1)^{-1} < 1$ pour $k \geq k_0$). Donc le reste $R_n(y)$ est majoré en valeur absolue par le premier terme de la série définissant $R_n(y)$, c'est-à-dire, $|R_n(y)| \leq y^{n+1}/(2n+2)!$. Si $y \in ]0,1]$, alors $k_0 = 1$ et $|R_n(y)| \leq 10^{-6}$ si $(2n+2)! \geq 10^6$. Le plus petit entier vérifiant cette inégalité est $n = 4$ (voir fichier Xcas). Si $y \in [1, 1000]$, $|R_n(y)| \leq 10^{-6}$ si $(2n+2)!/1000^{n+1} \geq 10^6$. Le plus petit entier vérifiant cette inégalité est $n = 48$. Comme 48 est supérieur à $\sqrt{1000}$ (car $40 = \sqrt{1600} > \sqrt{1000}$), on a bien $n \geq k_0$.
On constate que si l'on veut approximer $f(y)$ pour des grandes valeurs de $y$ avec une précision de $10^{-6}$ à l'aide de la série (1), il faut sommer beaucoup de termes. Les signes étant alternés, cela va conduire à des erreurs numériques importantes (voir l'illustration sur le fichier Xcas). Il vaut mieux utiliser une autre méthode.

3. $g_y : x \mapsto x^2 - y$ est convexe et admet $r = \sqrt{y}$ comme racine. D'après le théorème du cours, la suite itérée de Newton définie par $u_{n+1} = u_n - g_y(u_n)/g'_y(u_n)$ est décroissante et converge vers $r$ si $u_0 > r$. Si $y \in [1, 1000]$, on peut prendre $u_0 = 40$. Dans ce cas, on a la majoration de l'erreur $0 \leq u_n - r < g_y(u_n)/g'_y(r) \leq g_y(u_n)/2$ pour tout $y \in [1, 1000]$ (car $g'(r) = 2\sqrt{y} \geq 2$ si $y \geq 1$ et $g(u_n) > 0$). En particulier, si $g(u_N) \leq 10^{-6}$ alors l'erreur $|u_N - \sqrt{y}|$ est inférieure à $0.5 \times 10^{-6}$ .

4. Voir fichier Xcas.

5. Les séries de Taylor de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des séries alternées si $\theta \in [0, \pi/4]$. Donc les erreurs entre la somme des $n$ premiers termes de ces séries et les valeurs exactes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont majorées en valeur absolue par $(\pi/4)^{2n+2}/(2n+2)!$ pour le cosinus et par $(\pi/4)^{2n+3}/(2n+3)!$ pour le sinus. L'erreur commise à l'étape (d) est donc inférieure à $0.5 \times 10^{-6}$ si on somme $n = 4$ termes de la série du cosinus et $n = 3$ termes de la série du sinus (voir le fichier Xcas).

6. Voir fichier Xcas.

7. D'après la formule des accroissements finis, $\cos\theta - \cos\theta_0 = (\theta - \theta_0)\sin\xi$ avec $\xi$ entre $\theta_0$ et $\theta$, d'où $|\cos\theta - \cos\theta_0| \leq |\theta - \theta_0|$. D'après la question 3, $|\cos\theta - f(y)| \leq |\theta - \sqrt{y}| \leq 0.5 \times 10^{-6}$ pour $\theta = u_N$ si $g_y(u_N) \leq 10^{-6}$. On peut utiliser à l'étape (a) le programme `Newton` de la première évaluation de TP avec $\epsilon = 0.5 \times 10^{-6}$ et $m = 2$, alors on est sûr que $|\cos\theta - f(y)| \leq 0.5 \times 10^{-6}$. Or d'après la question 5, si $f_{\text{app}}(y)$ est la valeur approchée retournée par le programme, alors $|f_{\text{app}}(y) - \cos\theta| \leq 0.5 \times 10^{-6}$. D'où
$$|f_{\text{app}}(y) - f(y)| \leq |f_{\text{app}}(y) - \cos\theta| + |\cos\theta - f(y)| \leq 10^{-6} \, .$$
On obtient donc $f(y)$ avec une précision de $10^{-6}$ pour tout $y \in [1, 1000]$. Notons que l'on ne tient pas compte ici des erreurs numériques lors du codage du réel $y$ et des diverses opérations (itération de la suite, soustraction de $k\pi$, somme de la série,...).

**Exercice 2 :**

1. (voir le programme dans le fichier Xcas). L'intérêt d'effectuer la division euclidienne par $z - r_{\text{app}}$ où $r_{\text{app}}$ est une racine approchée, $\mathcal{P}(z) = \mathcal{Q}(z)(z - r_{\text{app}}) + \mathcal{R}(z)$, est le suivant. Si $r_{\text{app}}$ est proche de la vraie racine $r$, alors le reste $\mathcal{R}(z)$ sera petit pour tout $z$ dans un volume fini. La méthode de Newton appliquée à $\mathcal{Q}$ va donc donner une racine approchée $s_{\text{app}}$ de $\mathcal{Q}$ qui est également proche d'une racine $s$ de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ n'a que des racines simples, alors $s \neq r$ et on évite ainsi de retrouver plusieurs fois la même racine. L'on peut ainsi déterminer toutes les racines de $\mathcal{P}$, y compris les racines $r$ pour lesquelles le domaine du plan complexe formé par toutes les valeurs initiales $u_0$ telles que la suite de Newton converge vers $r$ est très petit.

2. La méthode de Newton ne converge pas si $\mathcal{P}$ a une racine $r$ de multiplicité supérieure à 1, car alors $\mathcal{P}'(r) = 0$.

**Exercice 3 :**

1. (voir le programme dans le fichier Xcas).

2. Pour $f(x) = x$ (et plus généralement pour toute fonction affine), les méthodes du point milieu et du trapèze donnent la valeur exacte $I = (b - a)^2/2$ de l'intégrale, comme cela se voit facilement en utilisant l'interprétation graphique de ces méthodes (cf. cours). Par contre, la méthode des rectangles donne un résultat approché, d'autant meilleur que $N$ est grand. Pour $f(x) = x^2$ (et plus généralement pour tout polynôme $\mathcal{P}$ de degré $\deg(\mathcal{P}) = 2$), les trois méthodes donnent des valeurs approchées de l'intégrale $I = (b - a)^3/3$. Quand on augmente $N$, on constate que les méthodes du point milieu et du trapèze convergent plus rapidement vers $I$ que la méthode des rectangles, en accord avec ce qui a été démontré en cours.