1er contrôle de TP groupe MAT, 1er mars 2016

Exercice 1. Méthode du point fixe.

1. Écrire un programme `iter` prenant en arguments la fonction f, la valeur initiale u_0, le réel positif ε et l'entier positif N et qui renvoie une valeur u_n de la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Le programme doit s'arrêter dès que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

   - $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$
   - le nombre d'itérations dépasse N.

   Dans le premier cas, le programme renverra les valeurs de u_{n+1} et de N, dans le second il renverra "problème de convergence?" puis les valeurs de $|u_{N+1} - u_N|$ et de N.

2. On veut résoudre numériquement l'équation $x^4 - 1 = x$ pour $x > 0$.

   (a) Montrer que cette équation a une unique solution $l > 0$ et que $l \in [1, \infty[$.

   (b) Donner une fonction f permettant de déterminer une valeur approchée de l par la méthode du point fixe, en itérant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (*Indication :* si vous trouvez une fonction f dont la dérivée est plus grande que 1 sur $[1, \infty[$, pensez à sa fonction réciproque !). Vous justifierez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l pour les valeurs initiales u_0 dans un intervalle que vous préciserez.

   (c) Quelle valeur de ε devez-vous prendre dans le programme `iter` pour être sûr que $|u_N - l|$ est inférieur à 10^{-6} ? Donner une valeur approchée de l à 10^{-6} près. Combien d'itérations sont-elles nécessaires? En déduire un encadrement de l.

Exercice 2. Méthode de Newton.

Soit g une fonction de classe C^2 convexe sur $[a, b]$ qui admet une racine $r \in]a, b[$ vérifiant $g'(r) \geq m$, où $m > 0$ est un nombre réel strictement positif.

1. Montrer graphiquement que si $u_0 > r$ alors la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la méthode de Newton est décroissante et converge vers r.

2. Utilisez le théorème des acroissements finis pour g sur l'intervalle $[r, u_n]$ et la croissance de g' afin d'établir la majoration suivante de l'erreur : $|u_n - r| \leq |g(u_n)|/m$.

3. Écrire un programme `Newton` calculant une valeur approchée de r avec une erreur absolue inférieure à ε. On donnera en arguments la fonction g, la valeur initiale $u_0 > r$, le minorant m de $g'(r)$, la précision $\varepsilon > 0$ et un nombre maximal N d'itérations (au cas où la suite ne converge pas...). Le programme doit s'arrêter dès que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

   - $|g(u_n)| \leq m\varepsilon$
   - le nombre d'itérations dépasse N.

4. Tester votre programme avec la fonction $g(x) = x^2 - 11$. Justifier théoriquement la convergence pour la valeur u_0 choisie. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour déterminer une valeur approchée de $r = \sqrt{11}$ avec une précision de 10^{-10} ? En déduire un encadrement de $\sqrt{11}$.

Exercice 3. Erreurs d'arrondis.

1. Déterminer le plus grand entier n tel que $(1.0 + 2^{-n}) - 1.0 \neq 0.0$ avec la précision obtenue sur xcas en fixant Digits:=30 puis Digits:=50.

2. Rappelez brièvement (et sans entrer dans les détails) comment les nombres réels sont codés sur ordinateur (flottants). Expliquez pourquoi les erreurs d'arrondis conduisent aux résultats que vous avez obtenus à la question précédente.

Corrigé du 1er contrôle de TP, groupe MAT

Exercice 1 : 1. voir le fichier joint.
2(a). La fonction $h(x) = x^4 - 1 - x$ est décroissante sur $[0, 4^{-1/3}]$, croissante sur $[4^{-1/3}, \infty[$, vaut -1 en $x = 0$ et en $x = 1$ et tend vers l'infini pour $x \to \infty$. Donc $h(x) = 0$ a une unique solution l sur $[0, \infty[$ et $l > 1$.
2(b). $f(x) = x^4 - 1$ est dilatante sur $I = [1, \infty[$ car $f'(x) = 4x^3 \geq 4 > 1$ pour tout $x \in I$. On prend donc sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = (1+x)^{1/4}$, qui est bien contractante sur I (sa dérivée vaut $(1+x)^{-3/4}/4 \leq 1/4 < 1$ pour tout $x \in I$). De plus f^{-1} vérifie $f^{-1}(I) = [2^{1/4}, \infty[\subset I$. Donc f^{-1} vérifie les hypothèses du théorème du point fixe. Il s'ensuit que pour tout $u_0 \in I$, la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ converge vers la solution sur I de $f^{-1}(x) = x$, c'est-à-dire, vers la solution sur I de $f(x) = x$.
2(c). On sait d'après le cours que $|u_n - l| \leq \frac{|u_{n+1}-u_n|}{1-k}$, où k est le facteur de contraction (ici $k = 1/4$). Donc pour que l'erreur absolue soit inférieure à 10^{-6}, il suffit de prendre $\varepsilon = 3/4 * 10^{-6}$ dans le programme iter. Celui-ci donne la valeur approchée $l \simeq u_n = 1.2207447 \pm 10^{-6}$ après $n = 7$ itérations. On a donc l'encadrement $1.220743 < l < 1.220746$.

Exercice 2 : 1. voir cours.
2. D'après la question 1, si $u_0 > r$ alors $r < u_n$ pour tout n. En vertu du théorème des accroissements finis, il existe $c \in]r, u_n[$ tel que

$$g(u_n) = g(u_n) - g(r) = (u_n - r)g'(c) \ .$$

Mais g est convexe, donc $g'' \geq 0$ et g' est croissante. Par conséquent, $g'(c) \geq g'(r) \geq m > 0$ et l'on a

$$|u_n - r| = \frac{|g(u_n)|}{g'(c)} \leq \frac{|g(u_n)|}{m} \ .$$

3. voir fichier joint.
4. $g(x) = x^2 - 11$ admet une racine $r = \sqrt{11} \in [3, 4]$ (en effet, $9 < r^2 = 11 < 16$). De plus g est de classe C^2, est convexe (car $g''(x) = 2 > 0$) et $g'(\sqrt{11}) \geq m = g'(3) = 6$. Donc g satisfait les hypothèses de l'énoncé. D'après la question 1, la suite de Newton est décroissante et converge vers $\sqrt{11}$ si $u_0 > \sqrt{11}$. On peut prendre par exemple $u_0 = 4$. Le programme Newton donne $r \simeq u_n = 3.31662479035 \pm 10^{-10}$ après $n = 4$ itérations. On en déduit l'encadrement $3.3166247902 < \sqrt{11} < 3.3166247905$.

Exercice 3 : 1. On trouve $n = 99$ pour Digits := 30 et $n = 166$ pour Digits := 50, voir fichier joint.
2. voir cours.