2ème contrôle de TP, groupe MIN-PMM-PHY, 3 mai 2016

Exercice 1. Fonction sinus intégral

On considère la fonction $\mathbf{Si} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t , \qquad x \geq 0 . \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de $\mathbf{Si}(x)$ pour tout $x \geq 0$ avec une précision au moins égale à 10^{-3}. On admet que $\mathbf{Si}(x)$ converge vers $\pi/2$ lorsque $x \to +\infty$, de sorte que

$$\mathbf{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t , \qquad x \geq 0 . \tag{2}$$

1. On s'intéresse d'abord aux grandes valeurs de l'argument x. En intégrant quatre fois par parties dans l'expression (2), établir un développement asymptotique de $\mathbf{Si}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Les termes tout intégrés produits par les intégrations par parties successives forment le développement asymptotique proprement dit, et le reste est donné par l'intégrale qui demeure à la fin du calcul. Donner une majoration de la différence entre $\mathbf{Si}(x)$ et son développement asymptotique, et montrer que cette différence est inférieure à 10^{-3} en valeur absolue si $x \geq 10$.

2. On cherche maintenant à estimer $\mathbf{Si}(x)$ pour les petites valeurs de x. Calculer le développement de Taylor de $\mathbf{Si}(x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $x = 0$, et estimer le reste de ce développement. Quel ordre n faut-il choisir de sorte que le reste soit inférieur à 10^{-3} pour tout $x \leq 10$? Ce procédé fournit-il une méthode efficace pour calculer $\mathbf{Si}(x)$ lorsque $x \in [0, 10]$?

3. On essaie à présent d'estimer l'intégrale (1) par la méthode de Simpson. On rappelle que, pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^4, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{6} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(f(x_j) + 4f(x_{j+1/2}) + f(x_{j+1}) \Big) \right| \leq \frac{(b-a)h^4}{2880} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)| , \tag{3}$$

   où $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + jh$. On prendra ici $a = 0$, $b = 10$, et $f(t) = \sin(t)/t$. Donner une majoration de la dérivée quatrième $|f^{(4)}|$ sur l'intervalle $[0, 10]$, et en déduire pour quelles valeurs de n la formule de Simpson (3) permet d'obtenir une estimation de $\mathbf{Si}(x)$ avec une précision au moins égale à 10^{-3} pour tout $x \in [0, 10]$.

4. Écrire un programme qui, pour tout $x \geq 0$, renvoie une approximation de $\mathbf{Si}(x)$ à 10^{-3} près, et comparer avec les valeurs obtenues en utilisant la fonction sinus intégral implantée dans Xcas.

Exercice 2. Phénomène de Runge

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = 1/(1 + x^2)$. Représenter graphiquement la fonction g ainsi que son polynôme d'interpolation de Lagrange calculé sur l'intervalle $[-a, a]$ avec une subdivision régulière à $n + 1$ points. On prendra d'abord $a = 1$ et $n = 5$, 10, 20, puis on répétera l'opération avec $a = 5$. Qu'observez-vous ? Interprétez vos observations en utilisant l'estimation de la différence entre g et son polynôme d'interpolation :

$$|g(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{y\in[-a,a]} |g^{(n+1)}(y)| \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| , \qquad x \in [-a, a] ,$$

où $x_j = (-1 + 2j/n)a$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Corrigé du 2ème contrôle de TP, groupe MIN-PMM-PHY

Exercice 1 :
1. En intégrant par parties on trouve pour $x > 0$:

$$\mathbf{Si}(x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{2\cos(x)}{x^3} + \frac{6\sin(x)}{x^4} - 24\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^5}\,\mathrm{d}t\;.$$

Le reste de ce développement asymptotique se majore ainsi :

$$\left|24\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^5}\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; 24\int_x^\infty \frac{1}{t^5}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{6}{x^4}\;,$$

et est donc inférieur à 10^{-3} si $x \ge 10$.
2. On a pour tout $x \ge 0$:

$$\mathbf{Si}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}\;.$$

Il s'agit d'une série alternée dont le terme général décroît pour $k \ge x/2$ et tend vers zéro lorsque $k \to \infty$. La série converge donc, et on a l'estimation

$$\left|\mathbf{Si}(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}\right| \;\le\; \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}\;, \qquad \text{si } x \le 2n\;.$$

Si on suppose $x \le 10$, le reste est inférieur à 10^{-3} si $n \ge 14$, et il faut donc prendre le développement de Taylor de $\mathbf{Si}(x)$ à l'ordre 27 au voisinage de zéro pour avoir une approximation à 10^{-3} près sur $[0, 10]$. L'évaluation numérique d'un tel polynôme est susceptible de générer des erreurs d'arrondi, donc cette approche n'est pas efficace ici.
3. Si $f(t) = \sin(t)/t$, on remarque que

$$f(t) \;=\; \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}x\;, \qquad \text{donc} \quad f^{(4)}(t) \;=\; \int_0^1 x^4\cos(tx)\,\mathrm{d}x\;,$$

d'où l'on déduit facilement que $|f^{(4)}(t)| \le 1/5$ pour tout $t \ge 0$. Pour la fonction f sur l'intervalle $[a, b] = [0, x]$, l'erreur de quadrature de la méthode de Simpson est donc majorée par $x^5/(14400\,n^4)$, quantité inférieure à 10^{-3} si $x \le 10$ et $n \ge 10$. Il suffit donc d'utiliser la méthode de Simpson avec une subdivision à 10 points pour calculer $\mathbf{Si}(x)$ à 10^{-3} près pour tout $x \le 10$.

Exercice 2 : En remarquant que

$$g(x) \;=\; \frac{i}{2}\Big(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\Big)\;,$$

on voit facilement que $|g^{(n)}(x)| \le n!$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. L'erreur d'interpolation sur l'intervalle $[-a, a]$ peut donc être estimée ainsi :

$$|g(x) - P_n(x)| \;\le\; \prod_{j=0}^{n}|x - x_j| \;\le\; \frac{n!}{4}\,h^{n+1} \;=\; \frac{n!}{4}\,\frac{(2a)^{n+1}}{n^{n+1}}\;.$$

Comme $n! \sim n^n\,e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque $n \to \infty$ (formule de Stirling), on voit que l'erreur ci-dessus tend vers zéro si $2a < e$ (par exemple, quand $a = 1$) et vers l'infini si $2a > e$ (par exemple, quand $a = 5$), en accord avec les observations numériques.