1er contrôle de TP, groupe MIN-PMM-PHY, 4 mars 2016

Exercice 1. Méthode du point fixe.

1. Écrire un programme `iter` admettant comme arguments la fonction f, la valeur initiale u_0, le réel positif ε et l'entier positif N, qui évalue la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Le programme doit s'arrêter dès que l'une des deux conditions suivantes est remplie :

   - $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$, ou
   - le nombre d'itérations dépasse N.

   Dans le premier cas, le programme renverra la valeur de u_n, et dans le second cas les valeurs de u_N, de $|u_{N+1} - u_N|$ et de N.

2. Appliquer le programme ci-dessus à la fonction $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, en prenant $u_0 = 0$, $\epsilon = 10^{-2}$, et $N = 10^k$ pour $k = 1, 2, 3, 4$. Qu'observez-vous ? Expliquer les résultats obtenus.

3. On veut résoudre numériquement l'équation $x^5 - 2x - 3 = 0$ pour $x \geq 0$.

   (a) Montrer que cette équation possède une unique solution positive ℓ, et que $\ell \in [1, 2]$.

   (b) Donner une fonction f permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ par la méthode du point fixe, en itérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (*Indication :* si vous trouvez une fonction f dont la dérivée est supérieure à 1 sur l'intervalle considéré, songez à utiliser la fonction réciproque !). On justifiera que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour des valeurs initiales u_0 dans un intervalle que l'on précisera.

   (c) Quelle valeur de ε devez-vous prendre dans le programme `iter` pour être sûr que $|u_N - \ell|$ soit inférieur à 10^{-6} ? Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près. Combien d'itérations sont-elles nécessaires? En déduire un encadrement de ℓ.

Exercice 2. Méthode de Newton.
Soit g une fonction de classe C^2 convexe sur $[a, b]$ qui admet une racine $r \in]a, b[$ vérifiant $g'(r) \geq m$, où $m > 0$ est un nombre réel strictement positif.

1. Montrer graphiquement que si $u_0 > r$ alors la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton est décroissante et converge vers r. On admet la majoration suivante de l'erreur : $|u_n - r| \leq |g(u_n)|/m$.

2. Écrire un programme `Newton` calculant une valeur approchée de r avec une erreur absolue inférieure à ε. On donnera en arguments la fonction g, la valeur initiale $u_0 > r$, le minorant m de $g'(r)$, la précision $\varepsilon > 0$ et un entier positif N. Le programme doit s'arrêter dès que $|g(u_n)| \leq m\varepsilon$, ou que le nombre d'itérations dépasse N.

3. Tester votre programme avec la fonction $g(x) = x^3 - 13$. Justifier théoriquement la convergence pour la valeur u_0 choisie. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour déterminer une valeur approchée de $r = \sqrt[3]{13}$ avec une précision de 10^{-10} ? En déduire un encadrement de $\sqrt[3]{13}$.

Exercice 3. Erreurs d'arrondis.
Pour $0 < x < 1$ on considère l'expression

$$h(x) = \frac{\tan(\sin(x))}{\tan(x^9)} - \frac{\sin(\tan(x))}{\sin(x^9)} .$$

Evaluer $h(0.001)$ en prenant Digits:=15, puis Digits:=20, Digits:=25, Digits:=30. Pouvez-vous expliquer les résultats obtenus ?

Corrigé du 1er contrôle de TP, groupe MIN-PMM-PHY

Exercice 1 :
1. Voir le programme joint.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ n'a manifestement aucun point fixe. La suite itérée avec donnée initiale $u_0 = 0$ est strictement croissante, et diverge lorsque $n \to \infty$. Toutefois, pour n grand, on a $u_{n+1} \approx u_n + 1/(2u_n)$, de sorte que $u_{n+1} - u_n$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Quel que soit le choix de $\epsilon > 0$, la première condition d'arrêt est donc remplie si n est assez grand, ce qui ne signifie nullement que la valeur obtenue, approximativement égale à $1/(2\epsilon)$, soit proche d'un point fixe de f !
3(a). La fonction $h(x) = x^5 - 2x - 3$ est négative et décroissante sur $[0,(2/5)^{1/4}]$, puis croissante sur $[(2/5)^{1/4}, +\infty[$, et $h(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Il existe donc un unique $\ell \geq 0$ tel que $h(\ell) = 0$, et comme $h(1) = -4$ et $h(2) = 25$ on a nécessairement $\ell \in [1,2]$.
3(b). La fonction $f(x) = (x^5 - 3)/2$ est dilatante sur $I = [1,2]$ car $f'(x) = 5x^4/2 \geq 5/2 > 1$ pour tout $x \in I$. On prend donc sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = (3+2x)^{1/5}$, qui est bien contractante sur I (sa dérivée vaut $(2/5)(3+2x)^{-4/5} \leq 1/9 < 1$ pour tout $x \in I$). On a de plus $f^{-1}(I) \subset I$, donc f^{-1} vérifie les hypothèses du théorème du point fixe. Il s'ensuit que pour tout $u_0 \in I$, la suite itérée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ converge vers la solution sur I de $f^{-1}(x) = x$, c'est-à-dire vers ℓ.
3(c). On sait d'après le cours que $|u_n - \ell| \leq \frac{|u_{n+1}-u_n|}{1-k}$, où k est le facteur de contraction (ici $k = 1/9$). Donc pour que l'erreur absolue soit inférieure à 10^{-6}, il suffit de prendre $\varepsilon = (8/9) * 10^{-6}$ dans le programme iter. Celui-ci donne la valeur approchée $\ell \simeq u_n = 1.4236054 \pm 10^{-6}$ après $n = 7$ itérations. On a donc l'encadrement $1.423604 \leq \ell \leq 1.423607$.

Exercice 2 :
1. Voir cours.
2. Voir le programme joint.
3. La fonction $g(x) = x^3 - 13$ admet une racine $r = \sqrt[3]{13} \in\,]2,3[$ (en effet, $8 < r^3 = 13 < 27$). De plus g est de classe C^2, est convexe sur $[2,3]$ (car $g''(x) = 6x > 0$) et $g'(x) \geq m = g'(2) = 12$ pour tout $x \in [1,2]$. Donc g satisfait aux hypothèses de l'énoncé. D'après la question 1, la suite définie par la méthode de Newton est décroissante et converge vers r si $u_0 = 3$ (par exemple). Le programme Newton donne $r \simeq u_n = 2.35133468772 \pm 10^{-10}$ après $n = 5$ itérations. On en déduit l'encadrement $2.3513346876 \leq \sqrt[3]{13} \leq 2.3513346879$.

Exercice 3 : On trouve $h(0.001) = 0$ pour Digits := 15, $h(0.001) = 24576$ pour Digits := 20, $h(0.001) = 33333.5$ pour Digits := 25, et $h(0.001) \approx 33333.37$ pour Digits := 30. En fait, un développement limité donne

$$h(x) = \frac{1}{30x^2} + \frac{29}{756} + \mathcal{O}(x^2),$$

lorsque $x \to 0$, donc $h(0.001) \approx 10^5/3 + 29/756$, en accord avec le résultat obtenu pour Digits := 30. Le problème rencontré dans l'évaluation numérique de $f(x)$ pour x petit est dû au fait que $f(x)$ est une différence de deux termes très grands, de l'ordre de x^{-8}, qui se compensent presque exactement, de sorte que le résultat est de l'ordre de x^{-2}. Une précision trop faible conduit à des erreurs sur chacun des termes qui sont faibles en valeur relative mais grandes en valeur absolue, de sorte que le résultat final est complètement faux.