

Devoir surveillé du 5 novembre 2012

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : notes de cours et de travaux dirigés, photocopié de cours. Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 2 heures.

L'exercice 4 sera rédigé sur une feuille séparée.

Exercice 1

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 11x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_3 + 22x_4 = 11 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_3 - 22x_4 = -11. \end{cases}$$

Exercice 2

1. On considère la matrice A s'écrivant dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

2. Les vecteurs \vec{E}_X , \vec{E}_Y et \vec{E}_Z s'obtiennent à partir des vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z de la base canonique par une rotation d'angle $\theta = 45^\circ$ autour de l'axe (Oy) .
Exprimer \vec{E}_X , \vec{E}_Y et \vec{E}_Z en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z (Rappel : $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$).
3. Écrire la matrice de passage P de la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ à la base $\{\vec{E}_X, \vec{E}_Y, \vec{E}_Z\}$.
4. Déterminer P^{-1} .
5. Déterminer l'expression de A dans la nouvelle base $\{\vec{E}_X, \vec{E}_Y, \vec{E}_Z\}$. Vérifier que la trace et le déterminant de la matrice obtenue coïncident avec la trace et le déterminant de A calculés dans la question 1.

Exercice 3

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.

Exercice 4

Un lac de forme conique (rayon R et profondeur maximale L , L étant la hauteur du cône) contient de la matière organique. La densité de matière organique (exprimée en kg/m^3) augmente avec la profondeur (mesurée depuis la surface du lac) en suivant la loi suivante :

$$\rho(z) = \rho_0 z / L.$$

1. Exprimez la masse totale (en kg) de matière organique en fonction de R , L et ρ_0 .
2. En supposant que la hauteur du lac diminue de 10% en été, comment varie la masse totale de matière organique entre été et hiver ?