Licence 2, MAT238 Université Joseph Fourier
2013-14

Feuille d'exercices sur les matrices

Exercice 1

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les matrices A^T, A^{-1}, $(A^T)^{-1}$, $A^{-1}A$, AA^{-1}, AA, AA^T et A^TA.
2. Calculer les traces et les déterminants de toutes les matrices de la question précédente.

Exercice 2 (Examen juin 2012 - seconde session)

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 58 & 11 & -8 \\ 6 & 27 & -6 \\ 12 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.
2. Dire si A est inversible et, si c'est le cas, calculer son inverse A^{-1}.

Exercice 3

1. On considère les vecteurs $\vec{E}_x$, $\vec{E}_y$ et $\vec{E}_z$ obtenus en tournant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un angle θ autour de l'axe (Oy). Déterminer $\vec{E}_x$, $\vec{E}_y$ et $\vec{E}_z$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ de la base canonique. En déduire la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{E}_i\}$.
2. Les vecteurs $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ et $\vec{F}_z$ sont obtenus à partir de $\vec{E}_x$, $\vec{E}_y$ et $\vec{E}_z$ par une symétrie par rapport au plan (xOz). Déterminer la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{F}_i\}$.
3. Les vecteurs $\vec{G}_x$, $\vec{G}_y$ et $\vec{G}_z$ sont obtenus à partir de $\vec{E}_x$, $\vec{E}_y$ et $\vec{E}_z$ par une rotation d'angle ϕ autour de l'axe dirigé selon $\vec{E}_z$. Déterminer la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{G}_i\}$.

Exercice 4

1. On considère à présent une rotation de la base canonique $\{\vec{e}_i\}$ d'angle $\theta = \pi/3$ Rad autour de l'axe (Ox). Écrire sans calculs la matrice de passage correspondante (vous pourrez "deviner" cette matrice par analogie avec l'exercice 2).
2. Déterminer les coordonnées dans la nouvelle base du vecteur de coordonnées
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$
dans la base canonique. Déterminer les coordonnées dans la base canonique du vecteur dont les coordonnées dans la nouvelle base sont
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la matrice A s'écrivant dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

4. Exprimer la matrice A dans la nouvelle base. Calculer la trace et le déterminant de la nouvelle matrice. Que constatez-vous ?

Exercice 5

Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice A de l'exercice 1. Exprimer les scalaires $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^{-1})$, $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ en fonction de ces valeurs propres et retrouver leurs valeurs déterminées dans l'exercice 1.

Exercice 6

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

   est-elle une matrice symétrique ?

2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de A.

3. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormée de vecteurs propres de A.

4. Calculer $P^{-1}AP$.

5. Calculer $\det(A)$.

6. Calculer A^{1000} et A^{-1}.

7. Résoudre le système d'équations linéaires :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

   où v_1, v_2 et v_3 sont des nombres réels quelconques.

Exercice 7

En utilisant le fait que le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda 1)$ d'une matrice A carrée 2×2 est invariant par changement de base, pouvez-vous en déduire de quelle(s) quantité(s) scalaire(s) dépendent les coefficients de ce polynôme?
Donner la forme explicite du polynôme caractéristique en fonction de ces quantités.