

Examen Partiel du 8 novembre 2013

Documents autorisés : notes de cours et de travaux dirigés, photocopié de cours.

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 2 heures.

Les exercices 3 et 4 au verso de ce document seront **rédigés sur une feuille séparée.**

Exercice 1

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 8x_1 - x_2 - x_3 & = 3 \\ -11x_2 + 2x_3 & = 1. \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\text{trace}(A)$ et $\det(A)$. A est-elle inversible ? A est-elle symétrique ?
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.
4. Écrire la matrice de passage P de l'ancienne base vers la base formée par les vecteurs propres déterminés à la question précédente.
5. Calculer l'inverse P^{-1} de P .
6. Déterminer $P^{-1}AP$.

Exercice 3

Calculer:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \ln^2 x) \quad (1)$$

et

$$\int_1^2 \ln^2 x \, dx + 2 \int_1^2 \ln x \, dx \quad (2)$$

En déduire la valeur de:

$$\int_1^2 \ln^2 x \, dx \quad (3)$$

Exercice 4

Dans un gisement récemment acquis par la compagnie minière pour laquelle vous travaillez, on a estimé que la densité de minerai exploitable, ρ , diminue en fonction de la profondeur, z , selon la relation suivante:

$$\rho = \rho_0 e^{-z/L} \quad (4)$$

On vous demande de calculer la masse totale de minerai dans la concession de forme cylindrique de rayon $R = 10$ km. Supposez que la densité en surface, ρ_0 , est de 0.05 g/m^3 et que $L = 0.5$ km. Attention L n'est pas la profondeur de la mine mais simplement une longueur caractérisant la diminution de la densité de minerai avec la profondeur.