

Rappels de Mathématiques pour les Géologues
Destinés aux étudiants de Licence 2
Parcours Géosciences

Jean BRAUN
Institut des Sciences de la Terre
Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble
Université Joseph Fourier de Grenoble

Année académique 2013-2014

Table des matières

1	Introduction	5
2	Equations Linéaires	7
2.1	Objectifs	7
2.2	Introduction	7
2.3	Plusieurs équations	8
2.4	Forme matricielle	11
2.5	Calcul matriciel	13
2.6	Inverse d'une matrice	14
2.7	Résolution du système	15
2.8	Factorisation	15
2.9	Points importants à retenir	16
2.10	Travaux Dirigés	17
3	Les Fonctions	19
3.1	Objectifs	19
3.2	Fonction linéaire	19
3.3	Fonction quadratique	21
3.4	Dérivée d'une fonction	22
3.5	Dérivée seconde	25
3.6	Autres fonctions	27
3.7	Fonction de plusieurs variables	32
3.8	Autres règles de dérivation	32
3.9	Développement en série de Taylor	33
3.10	Racines d'une fonction	34
3.11	Valeur approchée de la dérivée	36
3.12	Opérateurs différentiels	38
3.13	Intégrales	40
3.14	Calcul des intégrales	41
3.15	Valeur approchée de l'intégrale	44

3.16	Intégrales multiples	44
3.17	Relations de Gauss	45
3.18	La limite d'une fonction	46
3.19	Points importants à retenir	47
3.20	Travaux Dirigés	48
4	Equations Différentielles	55
4.1	Objectifs	55
4.2	Introduction	55
4.3	Décroissance radioactive	56
4.4	Dérivation de l'équation différentielle	57
4.5	Condition initiale	57
4.6	Trouver une solution	58
4.7	La diffusion	60
4.8	Loi de transport	60
4.9	Principe de conservation	61
4.10	L'équation de la diffusion	62
4.11	Le terme de production	62
4.12	Adimensionnement	63
4.13	Autres applications	65
4.14	Solution numérique	66
4.15	Points importants à retenir	67
4.16	Travaux dirigés	68
5	Géométrie - Trigonométrie	71
5.1	Objectifs	71
5.2	Introduction	71
5.3	Sinus et cosinus	72
5.4	Règles de trigonométrie	74
5.5	Conseils d'utilisation	74
5.6	Trigonométrie sphérique	77
5.7	Formules	78
5.8	Aire	79
5.9	Cartographie	79
5.10	Diagrammes polaires	80
5.11	Géométrie analytique	84
5.12	Objets simples	84
5.13	Notation vectorielle	86
5.14	Distances, intersections	87
5.15	Objets complexes	88
5.15.1	Surfaces quadriques en deux dimensions	88
5.15.2	Surfaces quadriques en trois dimensions	90

5.16	Points importants à retenir	93
5.17	Travaux dirigés	95
6	Autres usages des matrices	99
6.1	Objectifs	99
6.2	Introduction	99
6.3	Invariants	99
6.4	Tenseur des contraintes	101
6.5	Le gradient de vitesse	103
6.6	La rotation	104
6.7	Valeurs/vecteurs propres	105
6.8	Quadriques	107
6.9	Points importants à retenir	108
6.10	Travaux dirigés	109
7	Statistique	113
7.1	Objectifs	113
7.2	Notions de base	113
7.3	Moyenne, écart type	114
7.4	Histogramme	117
7.5	Probabilité	117
7.6	Régression linéaire	119
7.7	Propagation de l'erreur	122
7.8	Points importants à retenir	123
7.9	Travaux dirigés	125
8	Problèmes Intégrateurs	129
8.1	Objectifs	129
8.2	Introduction	129
8.3	Approche	129
8.3.1	Systèmes d'équations linéaires	130
8.3.2	Calcul matriciel	130
8.3.3	Analyse fonctionnelle	130
8.3.4	Equations différentielles	130
8.3.5	Géométrie et trigonométrie	131
8.4	Points importants à retenir	131
8.5	Travaux Dirigés	132
9	Solution des exercices	135
9.1	Equations linéaires	135
9.2	Les Fonctions	139
9.3	Equations différentielles	150
9.4	Géométrie - Trigonométrie	155

9.5	Autres usages des matrices	160
9.6	Statistique	167
9.7	Problèmes Intégrateurs	170
10	Annales	175
10.1	Partiel S4 2011 - MAT248 - 23 Mars 2011	175
10.1.1	Question 1	175
10.1.2	Question 2	176
10.1.3	Question 3	177
10.1.4	Question 4	178
10.2	Examen Première Session - Mai 2011	179
10.3	Partiel Novembre 2011	180
10.3.1	Exercice 1	180
10.3.2	Exercice 2	180
10.3.3	Exercice 3	180
10.3.4	Exercice 4	180
11	Questionnaire	183
11.1	Parcours	183
11.2	Auto-évaluation	183
11.3	Questions	183
	*	

Introduction

Le géologue a besoin d'outils mathématiques. Il n'est plus concevable d'entreprendre une formation en sciences (quelle qu'elle soit) sans posséder ou développer des connaissances solides en mathématiques. Par exemple, des mesures d'orientation de plans (failles, plans stratigraphiques) ne peuvent se comprendre que si l'on possède de bonnes notions de géométrie tri-dimensionnelle permettant de mettre les objets en relation les uns par rapport aux autres (intersections, parallélisme, etc.)

Les observations ou mesures géologiques deviennent de plus en plus volumineuses et il est demandé au géologue de connaître, au minimum, des notions de base de statistique pour pouvoir exprimer de façon quantitative l'erreur associée à une mesure ou la relation qui peut exister entre deux grandeurs mesurées indépendamment l'une de l'autre.

La géologie ne se limite plus à la description du monde physique qui nous entoure et des éléments qui nous permettent d'en deviner l'évolution temporelle ; elle évolue de plus en plus vers la compréhension des processus acteurs de cette évolution. Cela nécessite une paramétrisation de ces processus et une mise sous forme d'équation (différentielles).

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de Licence en géologie (géosciences). Elles ne contiennent rien de "nouveau" car la matière vue ici n'est qu'un rappel de ce qui a déjà été vu (et sans doute à maintes reprises) au niveau du Lycée, voire du Collège. Ce qui est nouveau ou différent, c'est la méthode employée. Premièrement, les notions de mathématiques décrites ici sont considérées avant tout comme des outils. Aucune démonstration n'est proposée ; on ne fait pas de différence entre ce qui est hypothèse, axiome ou théorème ; on suppose que tout est règle ou formule que l'on accepte sans justification. Deuxièmement, on se limite à des notions qui seront utiles au géologue, principalement, en algèbre linéaire, en calcul matriciel, en analyse fonctionnelle, en géométrie et trigonométrie, et en statistique. Ce cours n'est pas vraiment complet car le géologue aura sans nul doute besoin d'autres notions pour décrire et analyser ses observations de terrain et ses mesures en laboratoire. Mais il se limite intentionnellement à des matières de première utilité dans la formation du géologue. Troisièmement, ce cours est basé sur un grand nombre d'exemples qui, pour la plupart, sont directement liés à des problèmes que rencontrera un géologue lors de sa formation et dans sa vie professionnelle.

Chaque partie ou chapitre est suivi d'un nombre important de travaux pratiques ou "exercices" qui devraient permettre à l'étudiant de mieux comprendre l'utilité des outils mathématiques proposés. La dernière partie de ce cours contient un certain nombre de "problèmes intégrateurs" qui devraient

permettre à l'étudiant de trouver le ou les outils nécessaires à la résolution d'un problème, et donc de décider quelle(s) recette(s) utiliser. Le but est donc de rendre le futur géologue indépendant et de lui faire apprécier les mathématiques comme tout autre partie de sa formation : utiles, fascinantes et intéressantes...

Equations Linéaires

2.1 Objectifs

- Comprendre ce que représente et à quoi peut servir une équation linéaire
- Comprendre les systèmes d'équations linéaires
- Faire le lien avec un système matriciel et la notion de matrice
- Comprendre les opérations de base entre matrices (addition, multiplication et transposition)
- Comprendre les méthodes de base de résolution des systèmes matriciels

2.2 Introduction

Partons d'une équation linéaire simple :

$$3x = 2 \tag{2.2.1}$$

et généralisons la à sa forme paramétrique :

$$ax = b \tag{2.2.2}$$

On comprend que certains symboles représentent des inconnues (x) et d'autres des coefficients que l'on va supposer mesurables ou quantifiables (les a et b).

A vous de calculer la solution de cette équation :

$$x = ? \tag{2.2.3}$$

Une équation (même aussi simple que celle que nous avons posé ci-dessus) est la façon la plus juste de représenter un concept, et plus précisément de le quantifier, c'est-à-dire de quantifier toute relation qui pourrait exister entre des éléments d'un système. En utilisant des équations nous allons nous donner les outils nécessaires à la quantification des processus géologiques ; ces outils vont également nous permettre de travailler entre géologues et de comparer nos observations, nos idées. Finalement, une relation entre une ou plusieurs inconnues va nous permettre de prédire le comportement d'un système.

Ainsi si l'on connaît le volume de la Terre, V^1 , sa masse, $M = 5.9736 \times 10^{24}$ kg, on peut en déduire sa densité moyenne, ρ , en posant :

$$V\rho = M \quad (2.2.4)$$

que l'on résoud :

$$\rho = M/V \quad (2.2.5)$$

Attention ! Chaque fois que vous allez écrire une relation telle que celle-ci, il vous faudra vérifier que les grandeurs de part-et-d'autre du signe d'égalité ont les mêmes dimensions physiques. Vérifiez-le pour l'équation ci-dessus.

2.3 Plusieurs équations

On peut évidemment généraliser la notion d'équation linéaire (appelée ainsi car les inconnues n'y apparaissent qu'à la puissance 1), à celle de système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Prenons l'exemple d'un système de deux équations représentant, pour la première, le lien linéaire qui existe entre la température, T , et la profondeur, z , dans la lithosphère, que l'on a mesuré en creusant des trous et en extrapolant la relation obtenue à de plus grandes profondeurs, et, pour la seconde, le résultat d'expériences en laboratoire qui nous donnent la variation du point de fusion des roches en fonction de la profondeur (correspondant à la variation du point de fusion en fonction de la pression), comme illustré dans la Figure 2.1. La solution du système composés de ces deux équations entre température et profondeur nous donne la profondeur et la température à laquelle la fusion partielle des roches a lieu. Si l'on fait ce calcul relativement simple, on trouve que c'est à la base de la lithosphère (au sommet de l'asthénosphère) que cette intersection se trouve. C'est en fait de cette observation que l'on a déduit la définition de la lithosphère (couche rigide "flottant" sur l'asthénosphère liquide et qui est à la base même de la Théorie de la Tectonique des Plaques).

Avant d'aller plus loin, il est important de bien réaliser qu'il faut un même nombre d'équations que d'inconnues pour qu'un système linéaire puisse être résolu. Une bonne façon d'y arriver est de passer aux notions géométriques associées. La solution d'un système linéaire à une dimension revient à trouver la position d'un point sur une droite (espace à une dimension) ; en deux dimensions, une relation linéaire représente une droite ; la solution d'un système de deux équations à deux inconnues revient à trouver l'intersection des deux droites ; en 3D, ce sont les plans, etc...

Pour bien comprendre ce lien entre équations linéaires et leurs représentation géométrique, revenez à l'exemple précédent et dessinez sur un diagramme simple le géotherme et le solidus. Résolvez le problème graphiquement. Discuter les conditions dans lesquelles le système d'équations n'aurait pas de solution. De quelles parties du système d'équations dépendent ces conditions de résolution ?

Maintenant, essayons de résoudre ce système de façon plus précise. Nous voyons que cela demande déjà plus de temps à réaliser. Malgré cela continuons dans notre raisonnement et passons à des systèmes de dimension supérieure.

1. Je vous rappelle que vous pouvez obtenir le volume de la Terre à partir de la définition du mètre.

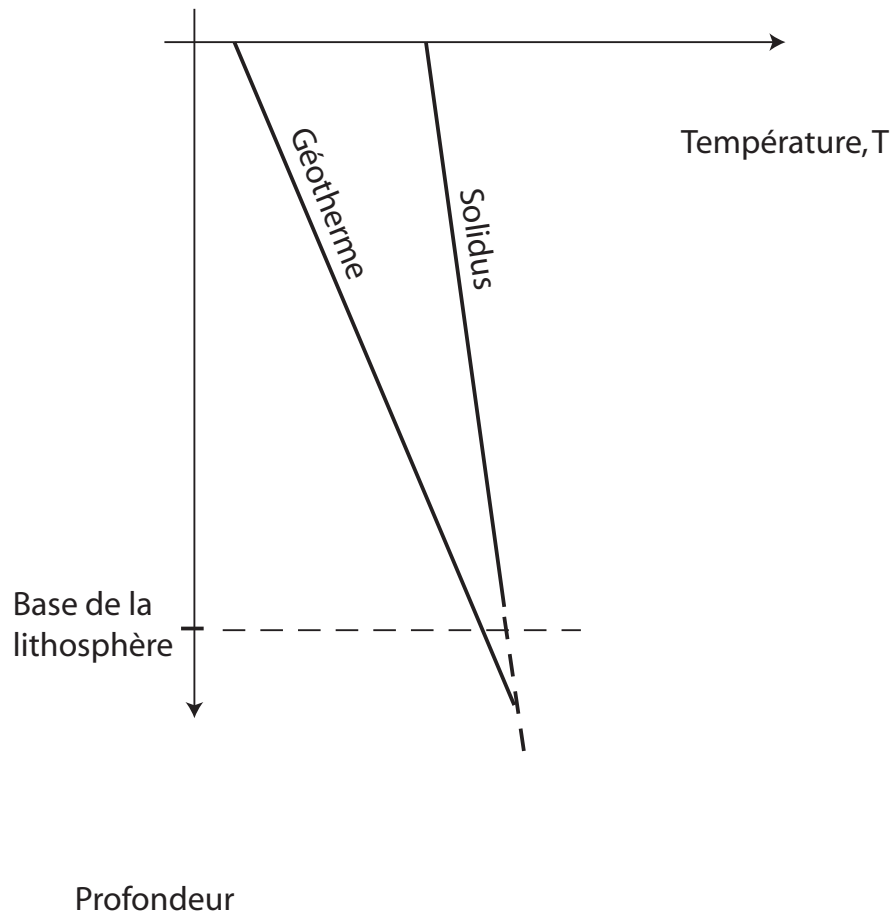


Figure 2.1 – Deux relations linéaires entre température et profondeur. L'une représente le géotherme continental (variation de la température en fonction de la profondeur dans la croûte continentale) ; l'autre représente la variation du point de fusion des roches en fonction de la profondeur.

Avant de passer de deux à trois, voire à n inconnues, il nous faut changer de notation et introduire deux (ou plusieurs) inconnues, x_1 et x_2 , et les coefficients, a_{ij} :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Notons bien que cette forme et la précédente - d'un système de deux équations à deux inconnues - sont équivalentes. Cette nouvelle forme est plus pratique car elle va pouvoir être généralisée à de plus grandes dimensions et permettre une écriture compacte.

Ainsi un système de trois équation à trois inconnues s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Essayez de le résoudre. Si vous y êtes arrivés combien de temps cela vous aura-t-il pris ? Par rapport au système de rang 2 ? On voit de suite que la solution de tels systèmes est laborieuse et va nécessiter l'utilisation d'ordinateurs pour les résoudre. Ce genre de systèmes est cependant très fréquent en sciences de la Terre est ils peuvent atteindre des dimensions énormes, de plusieurs milliers, voire millions d'inconnues. Nous allons donc maintenant passer à une généralisation à un système de taille quelconque.

Nous pouvons écrire un système de n équations linéaires à n inconnues sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Remarquons bien qu'il y a le même nombre d'inconnues que d'équations, n . Montrez que l'on retrouve bien les deux expressions précédentes pour $n = 1$ et $n = 2$.

Ceux d'entre vous qui se retrouveront à résoudre des problèmes en tomographie sismique ou en géodésie se verront confrontés à de tels systèmes d'équations. Prenons l'exemple de tomographie mantellique où nous avons des contraintes sur la distribution de la vitesse des ondes sismiques à l'intérieur du manteau nous provenant de temps d'arrivée d'ondes P ou S générées par des tremblements de terre et enregistrées dans des instruments installés en réseau tout autour du globe. La tomographie consiste à diviser le volume du manteau en petits cubes et d'associer à chaque cube une valeur de la vitesse sismique. Le travail du sismologue est de trouver la valeur des vitesses dans chaque cube qui va le mieux reproduire les temps d'arrivée des ondes observés. C'est ce que l'on appelle de l'optimisation. Pour y parvenir, le sismologue va devoir s'attaquer à un système de n équations à n inconnues, où n est le nombre de cubes utilisés pour discrétiser le manteau, typiquement de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers.

Le géodésien est, quant à lui, intéressé par la forme de la Terre et sa déformation en réponse à des mouvements rapides, associés à des tremblements de terre par exemple, ou plus lents, associés à la dérive des continents. Il fait également face à un problème d'optimisation mais où les contraintes sont

des observations de distance ou de vitesse (mesurées par GPS) et les inconnues sont des déformations ou des vitesses de déformation. Le nombre de données est plus restreint et donc la résolution des modèles et donc le nombre d'inconnues est plus faible. Malgré tout, le géodésien se retrouve également confronté à des systèmes d'équations linéaires.

Le géologue de terrain va également devoir résoudre des problèmes géométriques d'intersection de plans, de droites et de plans qui, nous l'avons vu plus haut, peuvent s'exprimer et donc se résoudre sous la forme de systèmes d'équations linéaires. De plus le structuraliste va devoir traiter de problèmes de déformation et de contraintes associées. Comme nous le verrons par après, la déformation et les contraintes sont représentées par des tenseurs qui sont en fait des petites matrices (de rang 3) qui, nous allons maintenant voir, sont une des représentations des systèmes d'équations linéaires utilisées par les mathématiciens pour les résoudre.

2.4 Forme matricielle

Les mathématiciens sont, par définition, de grands paresseux : ils détestent devoir écrire des formules mathématiques complexes et longues. Ils essaient toujours de les minimiser en définissant des raccourcis. L'un de ces raccourcis très pratiques est la forme matricielle des systèmes d'équations linéaires. Ainsi un système de n équations à n inconnues peut se résumer à la forme compacte suivante :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.4.1)$$

où \mathbf{A} est une matrice carrée de rang $n \times n$ définie comme suit, à partir des coefficients du système d'équations de départ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

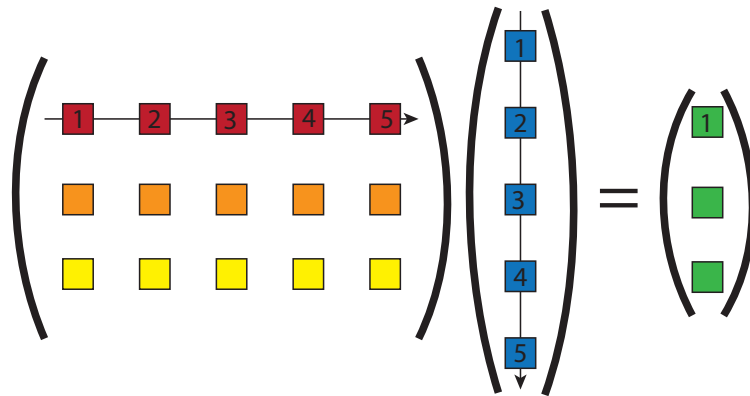
en deux dimensions, et :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

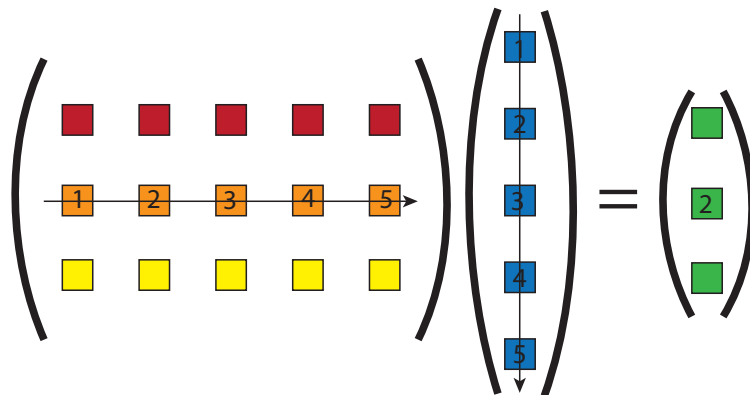
en n dimensions.

Pour faire le lien entre notation matricielle et système d'équations linéaires, il faut comprendre comment on multiplie une matrice par un vecteur - le résultat est un autre vecteur -. Aussi étrange que cela puisse paraître, on le fait avec les mains/doigts (voir Figure 2.2). On va successivement, multiplier les chiffres de la première ligne de la matrice par les chiffres du vecteur et progressivement additionner le résultat qui sera inscrit comme première élément dans le vecteur résultat. On répète cette opération en parcourant les chiffres de la deuxième ligne de la matrice par les chiffres du vecteur et les additionner pour obtenir le second élément/chiffre du vecteur résultat. On répétera cette opération autant de fois qu'il y a de de lignes dans la matrice.

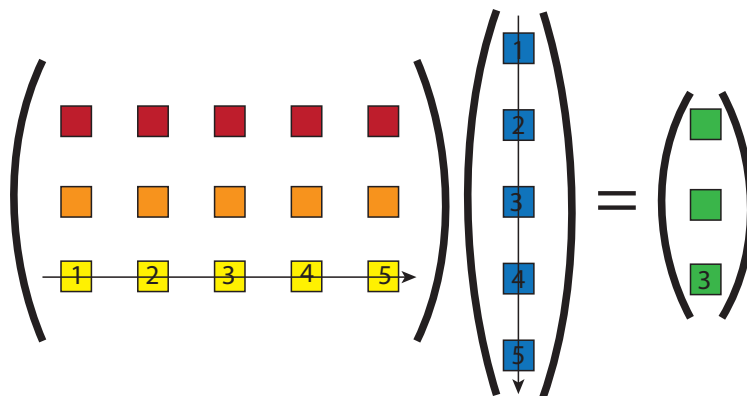
Cette opération peut se résumer de façon relativement compacte en utilisant une forme indiciaire, que vous avez sans doute déjà souvent utilisée pour exprimer des sommes et des produits d'un nombre



$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 = 1$$



$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 = 2$$



$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 = 3$$

Figure 2.2 – Schéma représentant le produit d'une matrice par un vecteur. Les opérations successives de multiplication d'une ligne de la matrice par le vecteur pour donner les colonnes successives du vecteur résultat sont décrites.

arbitraire ou simplement des longs de chiffres ou d'éléments :

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}x_i = b_j, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (2.4.4)$$

On peut encore compacter cette expression plus loin, en utilisant une des conventions dites d'Einstein, où le signe de sommation est oublié lorsqu'un indice apparaît plus d'une fois dans l'un des membres de l'équation (membre de droite dans notre cas) et n'apparaît pas dans l'autre. Ainsi, on obtient :

$$A_{ij}x_i = b_j \quad (2.4.5)$$

On peut en fait généraliser ces notions en considérant qu'un vecteur n'est rien d'autres qu'une matrice rectangulaire de rang $1 \times n$. En effet, on peut alors considérer le produit de deux matrices quelconques rectangulaires. Le résultat est, en général une autre matrice rectangulaire. Le produit de deux matrices s'obtient en appliquant la procédure décrite ci-dessus à chacune des colonnes de la matrice de droite. Pour obtenir les colonnes successives de la matrice résultat. Ceci implique des règles très strictes sur la forme des matrices pouvant être multipliées entre elles :

$$\mathbf{A}_{m \times n} \times \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p} \quad (2.4.6)$$

2.5 Calcul matriciel

Maintenant que nous avons introduit le concept de matrices quelconques, nous pouvons également définir comment on les additionnes :

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{C}_{m \times n} \quad (2.5.1)$$

et comment on les multiplie par une constante (ou grandeur scalaire), α :

$$\alpha \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha A_{n1} & \alpha A_{n2} & \cdots & \alpha A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.5.2)$$

Bien que les opérations associées aux grives rectangulaires soient très utiles dans beaucoup d'applications, nous allons nous limiter pour l'instant à quelques notions d'algèbre associées aux matrices carrées, celles que vous rencontrerez le plus souvent par la suite.

Le transposé d'une matrice carrée est la matrice obtenue en appliquant une opération miroir à la matrice par rapport à sa diagonale. Ainsi la matrice :

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}^T = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n) \quad (2.5.3)$$

ou, sous forme indiciaire :

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad (2.5.4)$$

est la transposée de la matrice \mathbf{A} .

Il existe quelques matrices remarquables, telles que la matrice unitaire de rang n , \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

qui a la propriété de transparence suivante, par rapport à la multiplication (on dit aussi qu'elle représente l'élément neutre de l'opération de multiplication des matrices) :

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad (2.5.6)$$

2.6 Inverse d'une matrice

Nous avons vu comment multiplier deux matrices et comment les additionner et les multiplier par une constante. On est en droite de se demander si une opération semblable à la division entre deux matrices existe. Ce serait bien pratique pour résoudre un système d'équations linéaires, car il suffirait de diviser le vecteur de droite \mathbf{b} par la matrice de gauche \mathbf{A} pour obtenir le vecteur solution \mathbf{x} . Malheureusement cette opération apparemment simple n'existe pas et il nous faudra alternativement faire appel à une nouvelle notion, celle de matrice inverse. Celle-ci se définit à partir de la question suivante. Pour toute matrice \mathbf{A} , existe-t-il une matrice "associée" \mathbf{B} telle que :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \quad (2.6.1)$$

Cette question est très pertinente en vue de résoudre un système d'équations linéaires car pour trouver la solution du système d'équations $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, on pourra alors écrire, en multipliant l'équation par \mathbf{B} :

$$\mathbf{BAx} = \mathbf{Bb} \quad (2.6.2)$$

et donc

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bb} \quad (2.6.3)$$

Donc, si nous avons une façon aisée de déterminer l'inverse de la matrice \mathbf{A} , que nous noterons \mathbf{A}^{-1} , nous pouvons obtenir la solution de l'équation matricielle et donc du système d'équations algébriques par simple multiplication :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.6.4)$$

Cependant, il existe des façons plus efficaces de résoudre un système d'équations linéaires que nous allons voir maintenant et qui ne nécessite pas le calcul de l'inverse de la matrice \mathbf{A} . Il s'agit cependant d'une notion très importante que nous reverrons dans le chapitre suivant, ainsi que la façon de calculer cet inverse.

2.7 Résolution du système

Pour résoudre un système d'équations linéaires, nous devons encore introduire ou rappeler trois règles simples. La première est que l'on peut résoudre un système d'équations en plaçant les équations dans n'importe quel ordre (on peut donc permuter l'ordre des lignes du système matriciel à volonté). La seconde est que l'on peut multiplier les deux membres de n'importe quelle équation par une constante sans altérer la solution du système (sauf si on multiplie par 0...). La troisième est que l'on peut remplacer n'importe quelle équation par la somme ou la différence entre deux des équations.

Pour résoudre le système, nous allons essayer de le transformer (sans en changer la solution, évidemment, pour qu'il prenne la forme d'un système triangulaire, c'est-à-dire que la matrice qui le représente aura des zéros dans sa partie supérieure ou inférieure, par rapport à la diagonale. On verra enfin qu'un système triangulaire est trivial à résoudre.

Nous allons utiliser la méthode de base développée par Gauss pour triangulariser la matrice. On va multiplier la deuxième ligne (deuxième équation) par le coefficient multipliant la première inconnue dans la première équation et la diviser par le coefficient multipliant la première inconnue dans la seconde équation. On va ensuite remplacer la seconde équation par la différence entre les deux premières équations ainsi transformées. Cette opération a pour conséquence que la nouvelle deuxième équation n'a plus de terme correspondant à la première inconnue. Le terme A_{21} est devenu nul.

Si nous répétons cette opération pour toutes les lignes successives de la matrice, c'est-à-dire de 3 à n , nous aurons éliminé tous les éléments de la première colonne de la matrice, sauf le premier, tout en conservant la propriété principale de ce système est que sa solution reste la même.

L'étape suivante consiste à répéter cette opération mais en partant de la troisième équation et de la seconde inconnue. En réalisant cette opération jusqu'à l'équation n , nous aurons transformé la matrice en une matrice triangulaire. Nous ferons cette opération sur une matrice d'ordre deux et trois en TP.

Essayons maintenant de formaliser cette approche en notation indiciaire, pour $k = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij} - \frac{A_{ik}}{A_{kk}} A_{kj}, & \text{pour } j = k, \dots, n \\ b_i &= b_i - \frac{A_{ik}}{A_{kk}} b_k & \text{pour } i = k + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Notons que puisqu'à chaque étape k nous divisons par le terme diagonal de l'équation k , A_{kk} , il est important que ce terme soit aussi différent de zéro que possible. Pour y parvenir, nous permuterons les équations de k à n pour que le terme diagonal soit maximal (en valeur absolue). On appellera cette opération de permutage le "pivotage" des équations.

2.8 Factorisation

Cette méthode de solution d'un système d'équations linéaires est assez basiques et devient assez inefficace pour nombre, n , d'équations élevé. D'autres méthodes semblables, dite méthodes de "factorisation", existent, qui, au lieu de chercher l'inverse de la matrice, ou de la rendre triangulaire, vise à la transformer en une forme factorisée, c'est-à-dire en un produit de deux matrices triangulaires (l'une supérieure et l'autre inférieure) :

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (2.8.1)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.8.2)$$

et

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.8.3)$$

On doit alors résoudre deux systèmes triangulaires successifs :

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2.8.4)$$

Cette factorisation est plus efficace que l'élimination de Gauss.

A noter que lorsque la matrice \mathbf{A} est "positive définie" (nous reviendrons à la définition exacte de ce terme) - ce qui est le cas de beaucoup de matrices avec lesquelles nous allons devoir jongler en tant que géologue - la méthode dite de "Cholesky", est la plus performante et consiste à trouver la matrice \mathbf{L} , triangulaire inférieure, telle que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (2.8.5)$$

et à résoudre :

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2.8.6)$$

2.9 Points importants à retenir

1. Pour pouvoir résoudre un système d'équations linéaires, il faut qu'il y ait autant d'équations indépendantes que d'inconnues.
2. Un système d'équations peut se représenter sous forme matricielle
3. Il existe également une équivalence géométrique simple à la résolution d'un système d'équations linéaires
4. Comment effectuer quelques opérations simples sur la matrices (addition, multiplication)
5. l'opération de division n'existe pas entre matrices et est remplacée par le calcul de la matrice inverse
6. Matrice transposée, matrice unitaire ou unité
7. Méthode d'élimination de Gauss pour la résolution d'un système d'équations linéaires
8. D'autres méthodes plus efficaces existent par factorisation mais nous n'en avons pas vu les détails

2.10 Travaux Dirigés

Exercice 1

Effectuez les opérations suivantes entre matrices et vecteurs (si elles sont réalisables) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} (1 \quad -2) =? \quad (2.10.3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.5)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.6)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.7)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} =? \quad (2.10.8)$$

Exercice 2

Mettez les équations linéaires suivantes sous forme matricielle :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \quad (2.10.9)$$

Exercice 3

Deux individus situés respectivement sur des sommets des Alpes d'altitudes 3000 m et à 2200 m, dévalent la pente de la montagne à la même vitesse $v = 4$ km/h (vitesse de déplacement parallèlement au sol). La pente du sommet à 3000 m est de 40% et celle du sommet à 2000 m est de 20%, ces pentes étant supposées constantes. S'ils partent en même temps, à quel moment la différence d'altitude entre

les deux individus sera t'elle égale à la moitié de la différence d'altitude initiale de 800 m ? Quelle est alors l'altitude de l'individu 1 ?

Exercice 4

En raison de la diminution de la densité de minerai dans un gisement en fonction de la profondeur, le prix d'extraction est passé de 100\$ par tonne à 150\$ par tonne en deux ans. Sur la même période, le prix du minerai est passé de 3000\$ par tonne à 3100\$ par tonne. En supposant que ces évolutions vont continuer dans les prochaines années à venir, calculez le nombre d'années d'exploitation prévu pour la mine en supposant que la compagnie minière exige que le prix de vente soit vingt fois supérieur au coût d'extraction.

Exercice 5

Résoudre le problème matriciel suivant par élimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2.10.10)$$

Exercice 6

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{cases} \quad (2.10.11)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 & = 13 \\ 4x_1 + 11x_2 & = 37 \end{cases} \quad (2.10.12)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 & = 12 \end{cases} \quad (2.10.13)$$

Les Fonctions

3.1 Objectifs

- A quoi sert une fonction comme représentation d'une grandeur physique ?
- Comprendre la notion de dérivée mesurant la vitesse de changement
- Relier dérivée première à pente et dérivée seconde à courbure
- Comprendre le développement en série de Taylor
- Introduire les notions d'opérateurs différentiels (gradient et divergence)
- Comprendre la notion d'intégrale comme une somme continue
- Comprendre et utiliser la notion de limite

3.2 Fonction linéaire

Revenons à l'équation algébrique :

$$ax + by = c \tag{3.2.1}$$

Elle exprime une relation entre x et y . Comme nous l'avons déjà vu plus haut, elle sera utilisée pour représenter une prédiction que nous voulons exprimer entre une variable plus ou moins connue et l'autre que nous voudrions connaître ou caractériser. Ainsi, reprenons l'exemple du champ de température à l'intérieur de la Terre. A proximité de la surface, de nombreuses observations nous indiquent que localement, la température augmente linéairement avec la profondeur. Nous pouvons donc ré-écrire cette relation linéaire sous la forme :

$$T = Gz + T_S \tag{3.2.2}$$

Que signifie les grandeurs G et T_S ? Il s'agit du gradient géothermique G en degrés par kilomètres et de la température à la surface, T_S . Typiquement, dans la croûte, le gradient géothermique, ou augmentation de la température avec la profondeur, G , est de 20 à 30°C/km ; nous supposons une température à la surface de l'ordre de -15 à 15°C.

Représentons cette relation dans un diagramme $T-z$ (figure 3.1). A quoi correspondent alors G et T_S ? Il s'agit bien entendu de la pente de la droite et de l'intersection à l'origine.

Nous pouvons maintenant prédire la température à n'importe quelle profondeur en mesurant la température à la surface (T_S) et la variation de température dans un puits de quelques mètres de

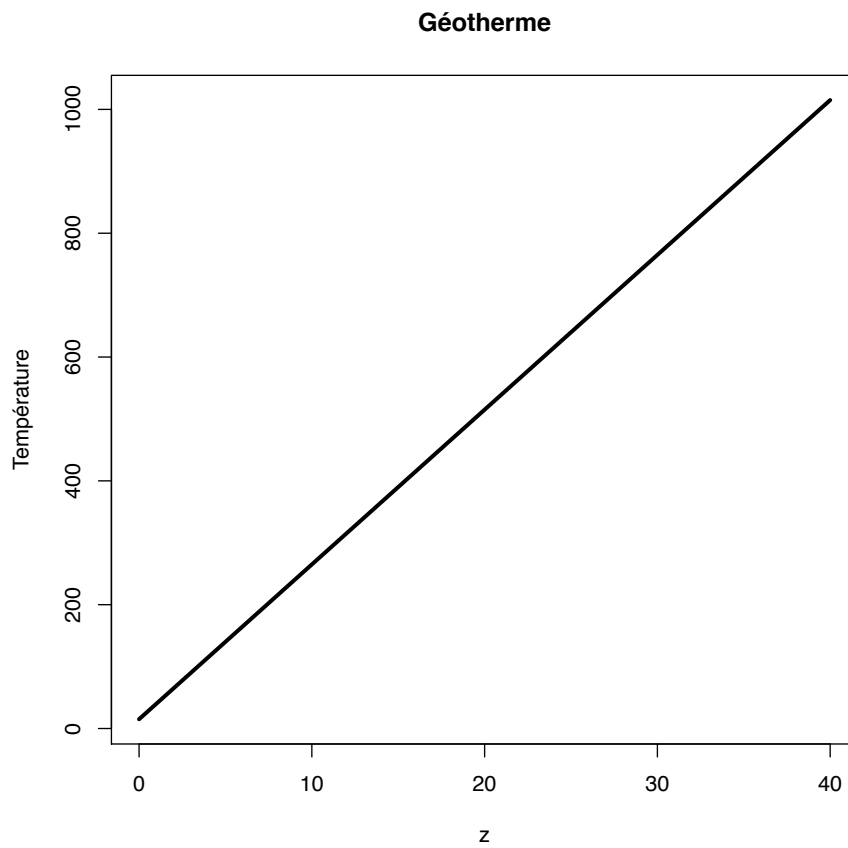


Figure 3.1 – Exemple de fonction linéaire : variation de la température près de la surface de la Terre.

profondeur (G). Nous dirons que T est une fonction de z , que nous noterons $T(z)$. Le plus important dans la définition d'une fonction c'est qu'à toute valeur de z ne corresponde qu'une seule valeur de T .

Dans la figure 3.2 vous est montré un appareil utilisé par les géophysiciens pour mesurer le gradient géothermique, G , dans les sédiments marins, au fond des océans. Cet instrument pénètre les sédiments sur quelques mètres de profondeur et en déduit le gradient géothermique. On l'utilise également pour déterminer la conductivité des sédiments en mesurant le temps que met la chaleur dégagée par friction lors de la pénétration de l'engin à se dissiper.



Figure 3.2 – Instrument utilisés pour mesurer le flux de chaleur provenant de l'intérieur de la Terre dans les sédiments océaniques

La notion de fonction se généralise à toute “prédiction” que nous jugerons bon de définir et d'utiliser. Ainsi nous pouvons parler de la vitesse d'un fluide en fonction de la position dans ce fluide, ou encore de la taille d'une planète en fonction de sa distance au soleil, ou de la grandeur d'un nuage en fonction du temps. Nous sommes libres de définir toutes les fonctions qui nous intéressent pour autant que la relation soit unique.

3.3 Fonction quadratique

Que se passe-t-il maintenant si nous utilisons la relation 3.2.2 pour prédire la température au Moho, c'est-à-dire à la base de la croûte, à 40 km de profondeur. En prenant une valeur moyenne de $25^{\circ}\text{C}/\text{km}$ pour G et de 0°C pour T_S , nous obtenons : 1000°C ... bien au delà de la température de fusion des roches feldspathiques caractérisant la composition à la base de la croûte continentale. Notre prédiction d'une augmentation linéaire est donc erronée. Il nous faut la raffiner.

Pour cela - et nous le démontrerons dans le chapitre suivant -, il nous faut considérer que la température n'augmente pas linéairement mais quadratiquement, et ce à cause de la présence d'éléments

radioactifs, comme l'U, le Th ou le K. La fonction $T(z)$ s'écrit alors :

$$T(z) = Az^2 + (G + Ah)z + T_S \quad (3.3.1)$$

On montrera que $A = -\rho H/2k$ où ρ , H et k sont la densité, le taux de production de chaleur par unité de masse et la conductivité moyennes des roches crustales et h l'épaisseur de la croûte. Ceci démontre qu'il faut être extrêmement vigilant sur l'utilisation des fonctions dans nos prédictions. Nous devons toujours bien retenir les hypothèses sur lesquelles elles sont basées (dans le cas d'une variation linéaire de la température avec la profondeur, on néglige l'effet de la production de chaleur), avant de les utiliser pour prédire le comportement du système étudié.

Graphiquement, une relation quadratique est celle d'une parabole, comme indiqué dans la figure 3.3a. Notons cependant que les géologues ont pris la mauvaise (bonne ?) habitude de représenter l'axe des profondeurs (z) verticalement et grandissant vers le bas (figure 3.3b). C'est une convention qui est différente de celle utilisée dans vos manuels de mathématique du Lycée, mais elle est tout à fait valable. Il faut cependant bien comprendre que, dans ce cas, l'axes vertical est devenu l'axe des abscisses et l'axe horizontal est l'axe des ordonnées de la fonction.

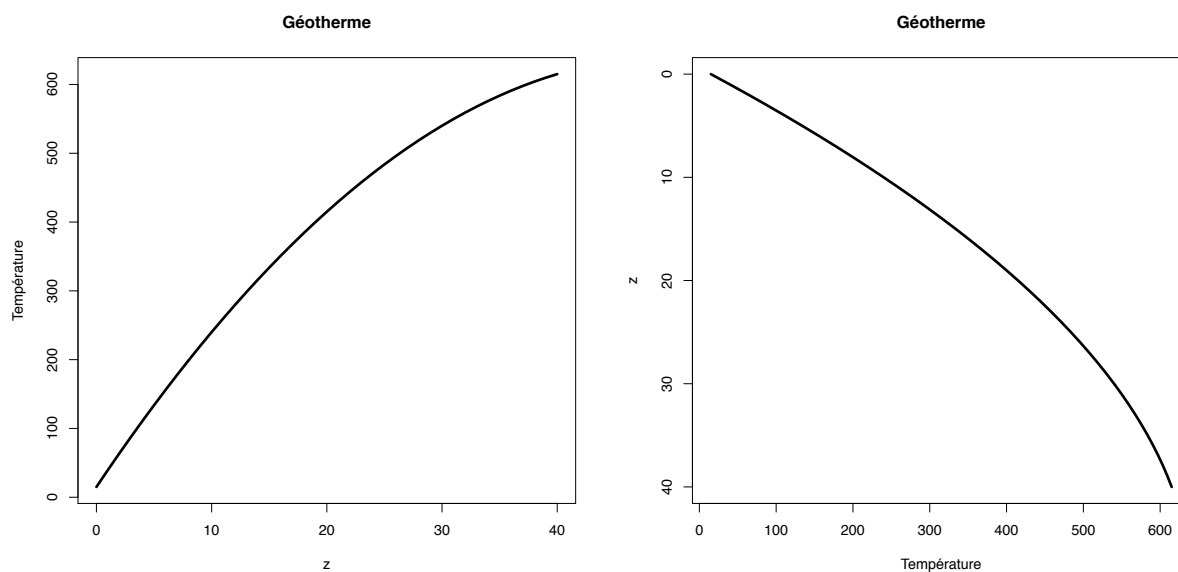


Figure 3.3 – Le géotherme continental, fonction quadratique de la profondeur, représentation des mathématiciens et celle des géologues.

3.4 Dérivée d'une fonction

Mais revenons à la fonction linéaire. Dans la figure 3.4, nous avons montré une série de fonctions linéaires caractérisées par différentes valeurs des paramètres G et T_S . On voit de suite comment se comporte la fonction linéaire pour différentes valeurs du gradient géothermique, G . Si ce gradient est nul, il n'y a pas de variation de la température avec la profondeur et la fonction est "plate" - c'est ce que l'on observe dans une chambre magmatique où le magma est en état de convection vigoureuse et la température est la même dans toute la chambre magmatique, quelque soit la profondeur ; si le

gradient est positif, la fonction température augmente avec z ; si le gradient est négatif, la fonction température diminue avec la profondeur, z - une situation que l'on ne rencontre pas souvent dans la terre. On dira que ce coefficient G dans l'équation d'une fonction linéaire représente la "pente" de la droite.

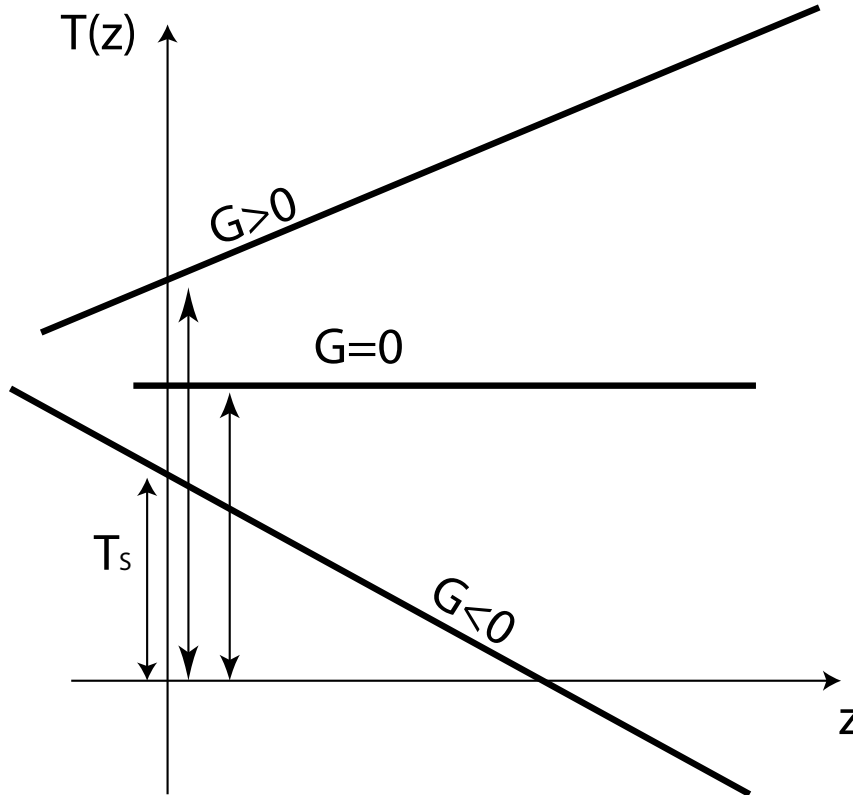


Figure 3.4 – Fonctions linéaires dont les paramètres G et T_s ont des valeurs différentes. G , le gradient géothermique nous renseigne sur la façon dont varie la fonction.

Nous allons généraliser cette définition à toute les fonctions en regardant comment la fonction varie par rapport à la variable. Ainsi on voit que dans la relation quadratique 3.3.1 représentée figure 3.3a, la pente du géotherme diminue avec la profondeur. Attention, alors que cela est évident dans la figure 3.3a, ce l'est moins dans la figure 3.3b, c'est-à-dire si nous suivons les conventions des géologues... Pour arriver à une définition générale de la pente d'une fonction, que nous appellerons la "dérivée" de cette fonction, on considèrera qu'il existe toujours une échelle suffisamment petite (que nous appellerons ϵ) à laquelle la fonction va apparaître linéaire. A cette échelle, nous définissons la dérivée comme étant la pente de la fonction linéaire correspondante (figure 3.5). Ainsi, la définition de la dérivée de la fonction $T(z)$, quelque soit sa forme paramétrique (linéaire, quadratique ou autre) est donnée par :

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(z + \epsilon) - T(z)}{\epsilon} \tag{3.4.1}$$

Il existe de nombreuses notations de la dérivée. Je vais utiliser ici celle qui est souvent réservée à la dérivée partielle :

$$\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.4.2}$$

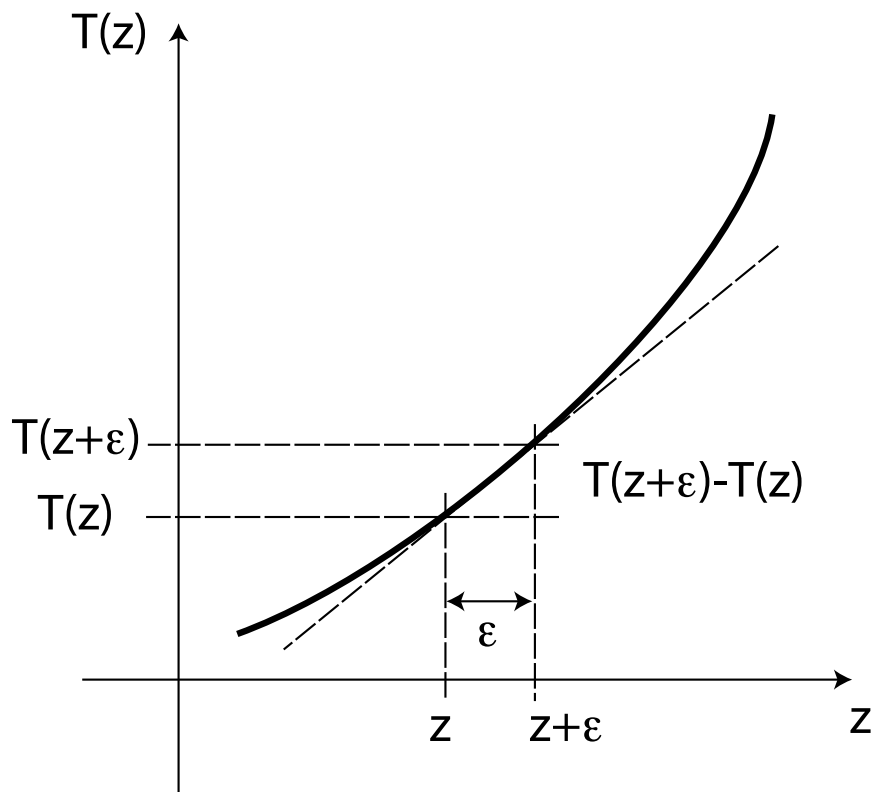


Figure 3.5 – La dérivée n'est rien d'autre que la pente de la fonction à une échelle ϵ suffisamment petite pour que la fonction y apparaisse linéaire.

Nous verrons pourquoi plus loin. Je l’apprécie beaucoup car elle nous aide à retenir que la dérivée d’une fonction T par rapport à une variable z à les dimensions de la fonction divisées par les dimensions de la variable. Donc ici les dimensions de la dérivée spatiale de la température a des dimensions de $^{\circ}\text{C}/\text{km}$.

Evidement la notion de dérivée ne se limite pas au gradient géothermique. Nous pouvons considérer la variation de toute grandeur géologique par rapport à n’importe quelle variable, comme illustré dans le tableau 3.1.

Fonction	Dérivée	Unités
Vitesse de rotation de la Terre en fonction du temps	Ralentissement séculaire de la rotation de la Terre (décélération)	km/Myr^2
Variation de la position de la Terre le long de son orbite	Vitesse de rotation	radian/heure
Concentration d’ ^{238}U dans une apatite en fonction du temps	Décroissance radioactive	mole/Myr
Hauteur topographique en fonction de la distance le long d’un profil	Pente	-
Variation du travail effectué en fonction de la taille d’un objet	Efficacité	J/m
Variation de la dureté d’une roche en fonction de sa densité	Indice de résistance massique	$\text{Pa m}^3/\text{kg}$

Table 3.1 – Exemple de fonction, de leurs dérivée et des unités de cette dérivée

3.5 Dérivée seconde

En plus du gradient géothermique, il existe une autre fonction que les géologues utilisent très régulièrement (et souvent sans se rendre compte qu’il s’agit d’une fonction) et aiment donc considérer pour introduire et comprendre des notions mathématiques : la topographie ou variation de la hauteur de la surface de la Terre, h , en fonction de la distance mesurée horizontalement, x . La pente (et donc la dérivée) de cette fonction est communément appelée ... la pente. Considérons maintenant une surface dont la pente n’est pas constante, mais varie en fonction de x , comme illustré dans la figure 3.6. Si la pente varie, on peut la considérer elle-même comme étant une fonction de x et, par conséquent, on peut en calculer la dérivée par rapport à x . Cette dérivée de la pente, ou dérivée de la dérivée de la surface topographique est appelée la “courbure” de la surface topographique. Là où la pente augmente, la courbure est positive et on est proche d’un trou (ou une concavité); là où la pente diminue, la courbure est négative et on est proche d’un sommet (ou une convexité). On généralisera cette

notion de dérivée de la dérivée à toute les fonctions en l'appelant la “dérivée seconde” de la fonction (ou courbure de la fonction). On la notera :

$$\frac{\partial^2 T(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T(z)}{\partial z} \quad (3.5.1)$$

Cette notation nous rappelle que les unités de la dérivée seconde sont les unités de la fonction dont on prend la dérivée divisées par les unités de la variable au carré. C'est pour cela que, dans cette notation, la variable est au carré tandis que la fonction ne l'est pas...

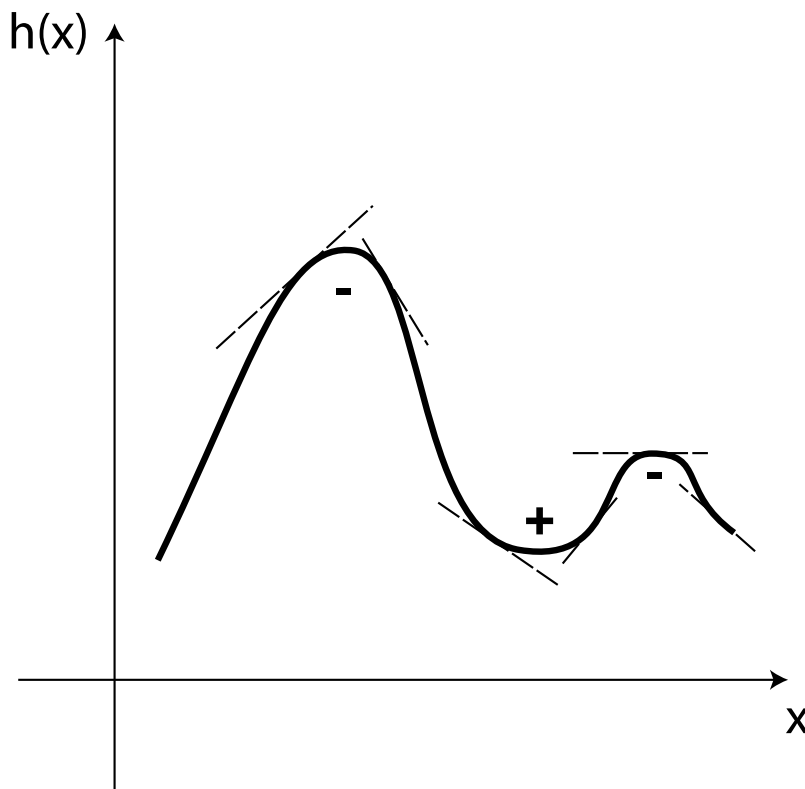


Figure 3.6 – La fonction topographie ou variation de la hauteur de la surface de la Terre en fonction de la distance horizontale. On remarque que la pente de cette fonction varie avec x . On peut alors en étudier la variation, que l'on appellera la courbure ou dérivée seconde de la topographie.

Dans la figure 3.6, on remarquera également qu'il existe des position x privilégiées, là où la pente s'annule : en ces points la fonction passe par un sommet ou un trou ; on parlera de valeurs extrêmes de la fonction. Les trous seront appelés minima (ou minimums) et les sommets seront appelés maxima (ou maximums). Donc pour trouver les endroits (valeurs de la variable) où, localement, la fonction passe par une valeur extrême, il suffit de trouver les valeurs de la variable où la dérivée de la fonction s'annule. Le signe de la dérivée seconde nous précisera si il s'agit d'un minimum (dérivée seconde positive) ou un maximum (dérivée seconde négative).

A noter que les mathématiciens ont évidemment généralisé cette idée de dérivée de la dérivée à la dérivée de la dérivée de la dérivée d'une fonction, la dérivée troisième, et ainsi de suite, pour arriver au concept de dérivée n ème :

$$\frac{\partial^n T(z)}{\partial z^n} = \frac{\partial}{\partial z} \dots \frac{\partial T(z)}{\partial z} \quad (3.5.2)$$

3.6 Autres fonctions

En plus de la fonction linéaire et de la fonction quadratique, il existe bien entendu un grand nombre de fonctions que les mathématiciens ont définies en combinant des opérations de bases (addition et multiplication) pour créer les fonctions polynomiales :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (3.6.1)$$

mais également, en considérant des sommes infinies (ou développements en séries) des fonctions telles que l'exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.6.2)$$

ou les fonctions périodiques :

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Il se sont également mis à combiner des fonctions pour créer d'autres fonctions, telles que les fonctions hyperboliques :

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

ou la tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (3.6.5)$$

ou à inventer le concept de fonction inverse, telle que le logarithme népérien ou naturel :

$$\text{si } x = e^y, \text{ alors } y = \ln x \quad (3.6.6)$$

Pour être plus correct, il faut également considérer que beaucoup de fonctions ont été "inventées" car elles correspondent à la solution d'une équation différentielle et que cette équation différentielle, comme nous le verrons plus loin, correspond à un problème physique (équation de la chaleur, propagation des ondes, équation du mouvement ou d'écoulement d'un fluide, etc.) Un grand nombre de mathématiciens ont été avant tout des physiciens... Ceci implique que de nombreuses fonctions ont en fait été définies à partir d'une propriété de leur dérivée. Ainsi l'exponentielle est la fonction qui est égale à sa dérivée :

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \quad (3.6.7)$$

Les fonctions hyperboliques sont celles qui sont égales à leur dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sinh x}{\partial x^2} &= \sinh x \\ \frac{\partial^2 \cosh x}{\partial x^2} &= \cosh x \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

et les fonctions trigonométriques sont celles qui sont égales à leur dérivée seconde, à un signe près :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} &= -\sin x \\ \frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} &= -\cos x\end{aligned}\tag{3.6.9}$$

Dans le tableau 3.2, nous donnons une liste non-exhaustive de fonctions “élémentaires” et de leurs dérivées.

Nom	Fonction	Dérivée
Constante	a	0
Linéaire	x	1
Quadratique	x^2	$2x$
Puissance	x^n	nx^{n-1}
Inverse	$1/x$	$-1/x^2$
Exponentielle	e^x	e^x
Logarithme népérien	$\ln x$	$1/x$
Exposant	$a^x = e^{x \ln a}$	$\ln a a^x$
Sinus	$\sin x$	$\cos x$
Cosinus	$\cos x$	$-\sin x$
Tangente	$\tan x = \sin x / \cos x$	$1 / \cos^2 x$
Cotangente	$\cot x = \cos x / \sin x$	$-1 / \sin^2 x$
Arcsinus	$\arcsin x$	$1 / \sqrt{1 - x^2}$
Arccosinus	$\arccos x$	$-1 / \sqrt{1 - x^2}$
Arctangente	$\arctan x$	$1 / (1 + x^2)$
Sinus hyperbolique	$\sinh x$	$\cosh x$
Cosinus hyperbolique	$\cosh x$	$\sinh x$
Tangente hyperbolique	$\tanh x$	$1 / \cosh^2 x$
Arcsinus hyperbolique	$\operatorname{arcsinh} x$	$1 / \sqrt{1 + x^2}$
Arccosinus hyperbolique	$\operatorname{arccosh} x$	$-1 / (\sqrt{1 - x} \sqrt{1 + x})$
Arctangente hyperbolique	$\operatorname{arctanh} x$	$1 / (1 - x^2)$

Table 3.2 – Exemples de fonctions et de leurs dérivées

Dans les figures suivantes, nous donnons la forme des ces fonctions. Elles possèdent chacune un nombre intéressant de propriétés, que nous n’avons malheureusement pas le temps de voir. Vous les trouverez en partie sur Wikipedia et en totalité (ou presque) dans un livre de référence sur le sujet.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1965 (and subsequent editions). Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 1046p.

Il faut noter que toutes les fonctions ne sont pas définies partout. Certaines fonctions n’existent que pour une partie des valeurs de son argument (on appelle cette partie son ensemble de définition). Ainsi la fonction $\ln(x)$ n’est définie que pour des valeurs positives de x , les fonctions $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\operatorname{arctanh}(x)$ ne sont définies que pour $-1 \leq x \leq 1$. La fonction $1/x$ n’est pas définie en 0. La fonction

$\tan(x)$ n'est pas définie pour des valeurs de x multiples de $\pi/2$. La fonction $\operatorname{arccosh}(x)$ n'est définie que pour $x > 1$.

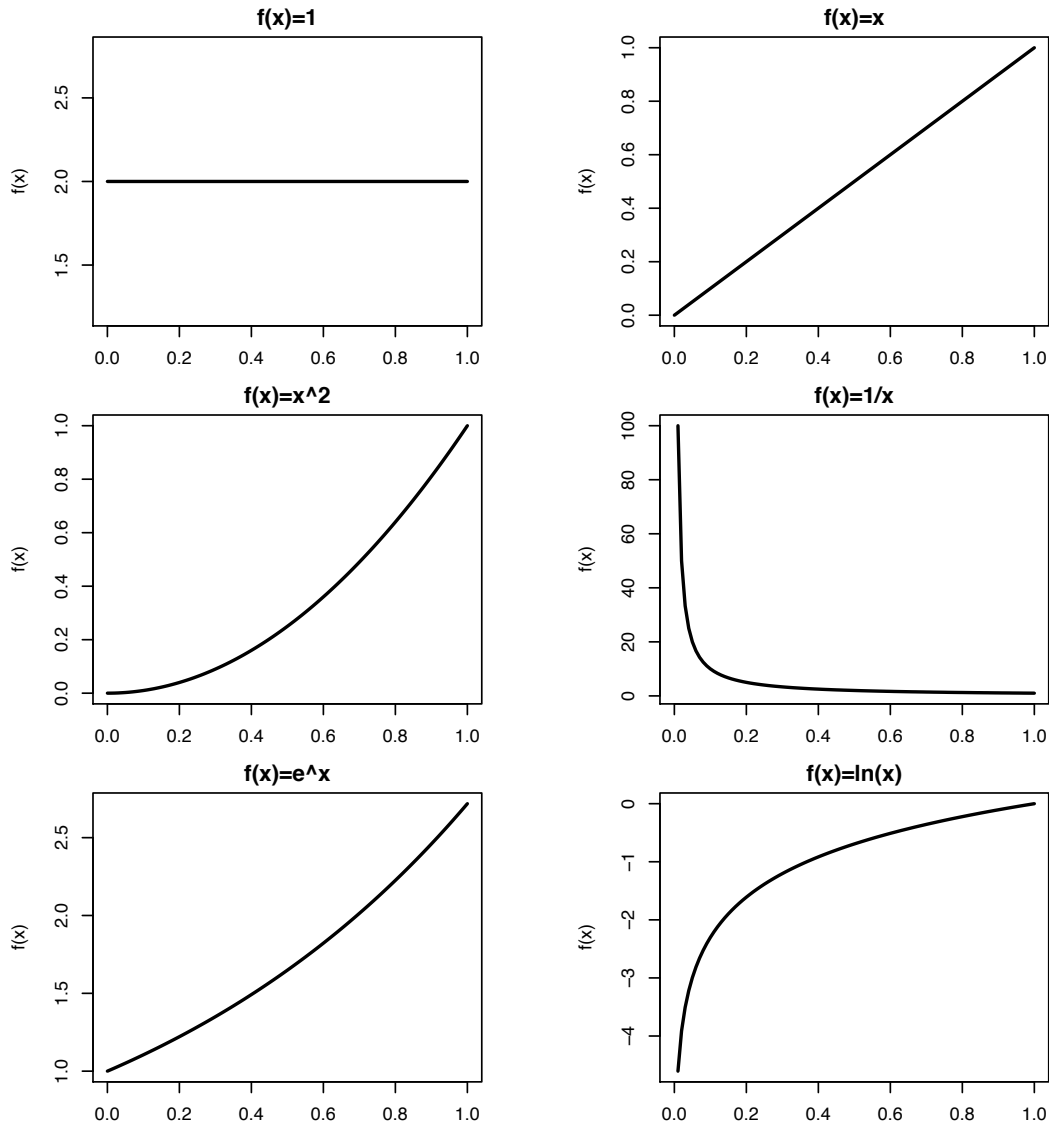


Figure 3.7 – Graphiques des fonctions constante, linéaire, quadratique, inverse, exponentielle et logarithmique.

Bien que certaines de ces fonctions (comme les fonctions inverses trigonométriques ou les fonctions hyperboliques) puissent apparaître abstraites pour le commun des géologues (et des non-mathématiciens, en général), elles ont une utilité, en partie de par leurs dérivées qui sont souvent des fonctions relativement simples - et nous verrons que nous allons apprécier bientôt les fonctions dont la dérivée est une fonction simple - et en partie de par leur forme. Par exemple la fonction arctangente hyperbolique est une fonction qui prend des valeurs variant entre plus ou moins l'infini de façon relativement lisse pour des valeurs de l'argument (x) variant entre 0 et 1. Ceci va nous permettre de paramétriser la variation plus ou moins abrupte d'un paramètre ou d'une propriété à l'interface entre deux roches, deux couches sédimentaires, ou deux grains.

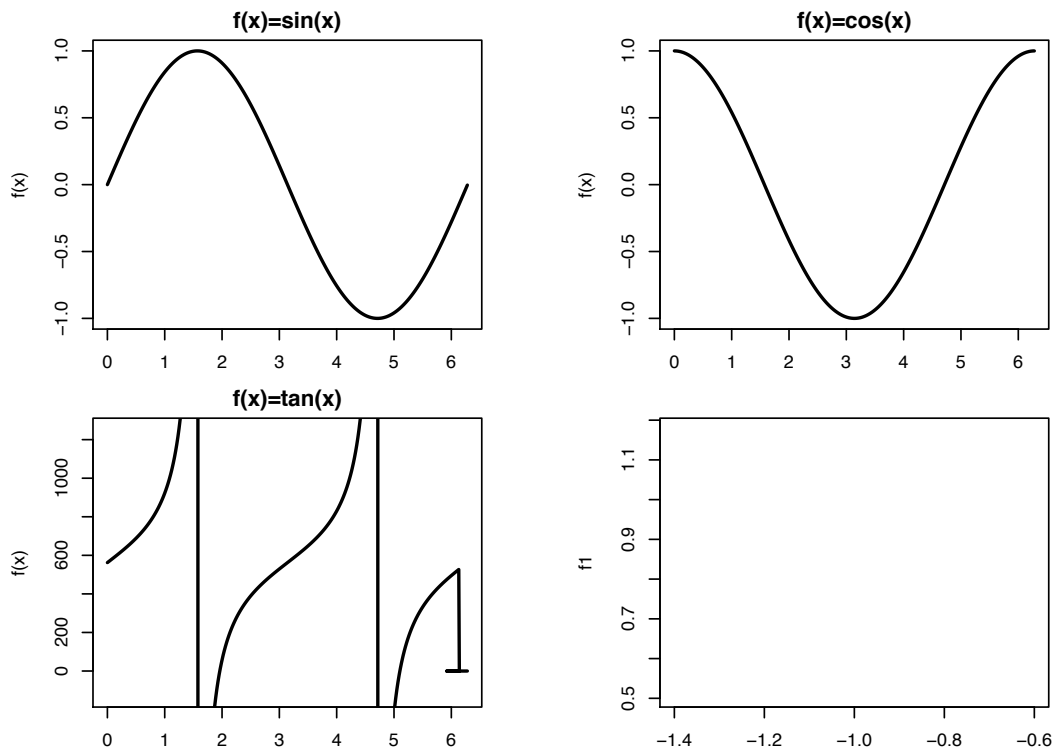


Figure 3.8 – Graphiques des fonctions sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus et arctangente.

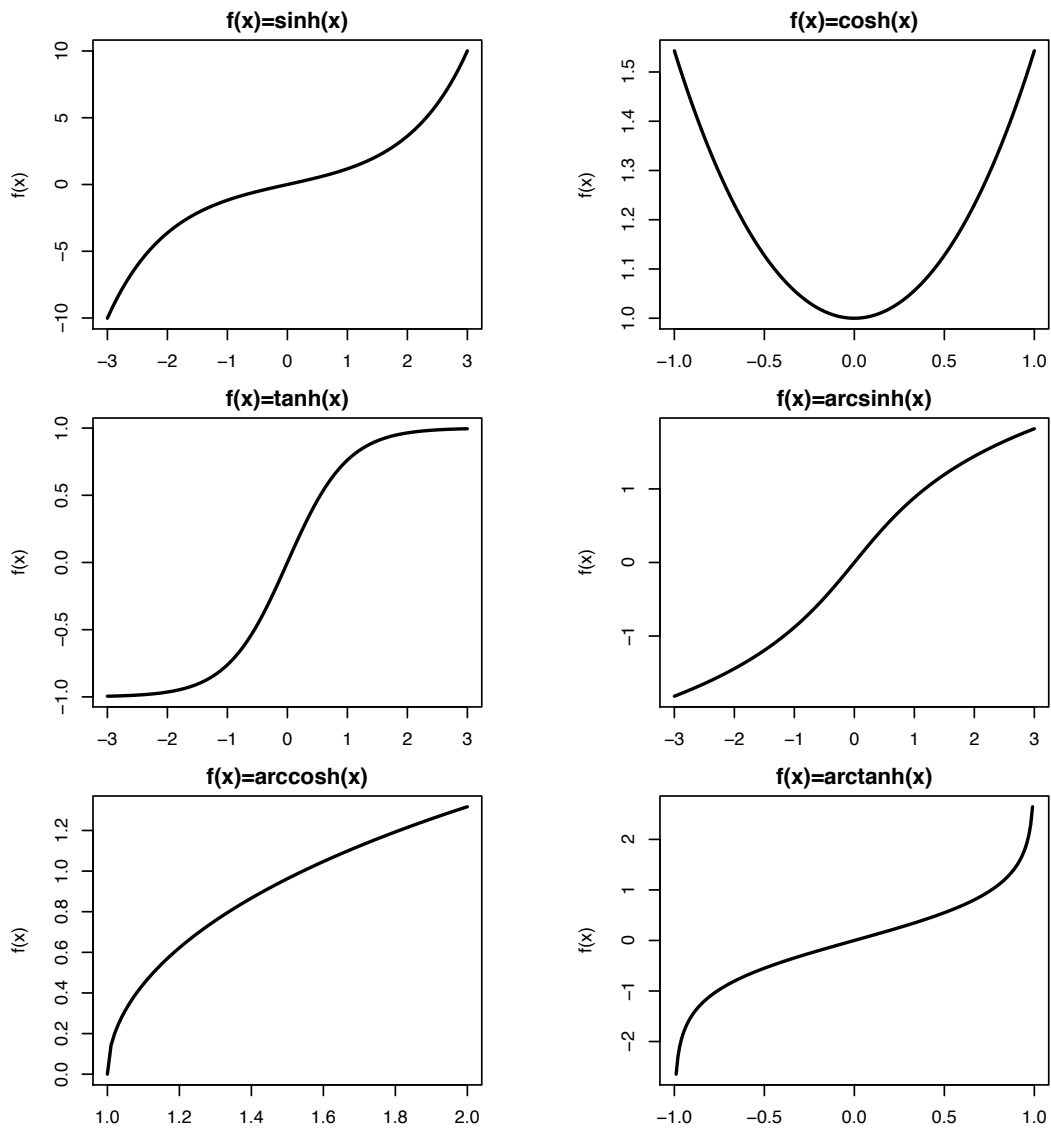


Figure 3.9 – Graphiques des fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique, arcsinu hyperbolique, arccosinus hyperbolique et arctangente hyperbolique.

3.7 Fonction de plusieurs variables

Une grandeur quelconque, telle que la température à l'intérieur de la terre, peut dépendre de plus d'une variable. Ainsi la température va varier en fonction de la profondeur mais, à plus grande échelle, en fonction de la position horizontale et donc des deux autres variables spatiales, x et y . Si l'on considère la température à l'intérieur de la croûte suite à un événement tectonique ou magmatique, il est clair qu'elle variera aussi en fonction du temps. On écrira alors :

$$T(x, y, z, t) \quad (3.7.1)$$

et cette fonction aura plusieurs dérivées, une par variable :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7.2)$$

3.8 Autres règles de dérivation

Pour obtenir la dérivée de fonctions plus complexes, il faut également retenir les règles suivantes de dérivations concernant :

– la dérivée d'une somme de deux fonction :

$$\frac{\partial(f(x) + g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (3.8.1)$$

– la dérivée d'un produit de deux fonctions

$$\frac{\partial(f(x) \times g(x))}{\partial x} = g(x) \times \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) \times \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (3.8.2)$$

– la dérivée d'une fraction de deux fonctions

$$\frac{\partial(f(x)/g(x))}{\partial x} = \frac{g(x) \times \frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x) \times \frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)} \quad (3.8.3)$$

– la dérivée d'une fonction composée

$$\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(g)}{\partial g} \Big|_{g(x)} \times \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3.8.4)$$

Pour illustrer cette dernière règle très importante et souvent utilisée, calculons la dérivée de la fonction e^{-x^2} , que l'on peut décomposer comme suit :

$$e^{-x^2} = e^g \text{ où } g(x) = -x^2 \quad (3.8.5)$$

Et donc :

$$\frac{\partial e^{-x^2}}{\partial x} = \frac{\partial e^g}{\partial g} \Big|_{g=-x^2} \times \frac{\partial(-x^2)}{\partial x} = e^g \Big|_{g=-x^2} (-2x) = -2xe^{-x^2} \quad (3.8.6)$$

Il faut également considérer que, pour une fonction dépendant de plus d'une variable, certaines de ces variables peuvent dépendre l'une de l'autre ; ainsi reprenons l'exemple de la température qui dépend, dans la Terre, de la position et du temps. Ainsi si les roches sont en mouvement, les coordonnées définissant la position des roches, x , y et z , dépendent du temps. Donc si nous voulons calculer la

dérivée de la température par rapport au temps, il faudra non seulement tenir compte du fait que la température change localement mais que la position des roches change en fonction du temps. La règle de dérivation des fonctions à plusieurs variables nous dit que si la fonction $f(x_i)$ dépend de N variables, x_i , $i = 1, \dots, N$, la dérivée de la fonction par rapport à une de ces variables, x_k , est donnée par :

$$\frac{df}{dx_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j \neq k}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \quad (3.8.7)$$

On remarquera une nouvelle notation pour la dérivée (avec des “d” droits et plus courbes). On parle de la dérivée totale d’une fonction par rapport à une de ses variables qui s’exprime en fonction de la somme de sa dérivée partielle par rapport à cette variable et des produits de ses dérivées partielles par rapport aux autres variables par la dérivée partielle des variables les unes par rapport aux autres. Notons que si deux variables sont indépendantes l’une de l’autre, leur dérivées partielles respectives sont nulles et le terme correspondant dans la somme donnée ci-dessus est nul.

Ainsi, si nous appliquons cela à la dérivée totale de la température par rapport au temps dans une couche géologique en mouvement (dû à des processus tectoniques par exemple), nous obtenons :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.8.8)$$

On notera que la variation spatiale d’une coordonnée spatiale d’une roche n’est autre que la vitesse de cette roche dans la direction correspondante, et nous pouvons écrire :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w \quad (3.8.9)$$

où u , v et w sont les composantes de la vitesse dans les trois directions spatiales.

3.9 Développement en série de Taylor

Il existe une propriété fantastique de toutes les fonctions, où du moins de celles dont on peut calculer toutes les dérivées, qui s’exprime sous la forme du “développement en série de Taylor”. On nous la présente habituellement sous la forme d’une relation assez compliquée. Ici nous allons l’exprimer de façon simple mais extrêmement utile :

Si je connais la valeur d’une fonction et de toutes ses dérivées en un point, alors je connais la valeur de cette fonction en tout point où elle est définie.

Sous forme d’équation, le développement ou expansion en série de Taylor, s’exprime :

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x=a} \quad (3.9.1)$$

où l’on voit bien que si je connais la valeur de $f(a)$ et de $\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_a$, alors je peux calculer la valeur de $f(x)$ en tout x .

Le mieux est de prendre un exemple, en appliquant cette formule à la fonction $\sin(x)$, dont nous connaissons toutes les dérivées :

$$\frac{\partial^n \sin x}{\partial x^n} = \begin{cases} \cos x & \text{if } n = 4k - 3 \\ -\sin x & \text{if } n = 4k - 2 \\ -\cos x & \text{if } n = 4k - 1 \\ \sin x & \text{if } n = 4k \end{cases} \text{ for } k = 1, \dots, \infty \quad (3.9.2)$$

La formule de Taylor nous donne :

$$\begin{aligned} \sin(x) = \sin(a) + \frac{(x-a)}{1!} \cos(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin(a) - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos(a) + \frac{(x-a)^4}{4!} \sin(a) + \\ \frac{(x-a)^5}{5!} \cos(a) - \frac{(x-a)^6}{6!} \sin(a) - \frac{(x-a)^7}{7!} \cos(a) + \frac{(x-a)^8}{8!} \sin(a) + \dots \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

Bien que cette somme soit infinie, on voit que la division du terme n par $n!$ va rendre les termes d'ordre (n) élevé très vite négligeables et va faire “converger” cette somme assez rapidement, du moins pour des valeurs de x par trop éloignées de a . En général, on appliquera donc cette relation dans le “voisinage” de a ; mais ce n'est pas indispensable. Pour illustrer ce dernier point, nous pouvons regarder à quoi ressemble la fonction décrite ci-dessus en fonction du nombre de termes préservés dans l'expansion, comme illustré dans la figure 3.10 où les dix premiers termes ont été calculés pour trois valeurs différentes de a : 0, 1 et 2.

Notons que si nous faisons le choix judicieux de prendre $a = 0$, nous retrouvons le développement en série de la fonction $\sin(x)$ quelquefois utilisé pour la définir :

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3.9.4)$$

3.10 Racines d'une fonction

Lorsque l'on résout de vrais problèmes, on se trouve souvent confronté à des équations non linéaires, et souvent non inversibles; c'est-à-dire des fonctions dont on ne peut trouver la fonction inverse. Prenons un exemple :

$$f(x) = x - e^{-x} \quad (3.10.1)$$

ne possède pas de fonction inverse. Peut-on malgré tout trouver la valeur de x à laquelle cette fonction s'annule? On parle de trouver la “racine” de la fonction. Notons que l'on peut toujours généraliser cette question et trouver la valeur de x à laquelle une fonction prend une valeur donnée f_0 en cherchant la racine de la fonction $f(x) - f_0$.

Pour y arriver, nous allons utiliser le développement en série de Taylor en un point proche de la racine, en nous arrêtant au premier terme (terme linéaire). Nous pourrions facilement calculer la racine de cette fonction et l'utiliser comme point de départ pour re-développer la fonction. Nous appliquerons cette technique autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que la racine converge.

En pratique, cela donne :

1. Trouver une première valeur approchée de la racine, x_0 ; le meilleur moyen pour y parvenir est de dessiner la fonction ou, si cela n'est pas possible, de choisir un point quelconque dans l'intervalle de définition de la fonction; nous verrons plus tard que certaines fonctions demanderont d'être

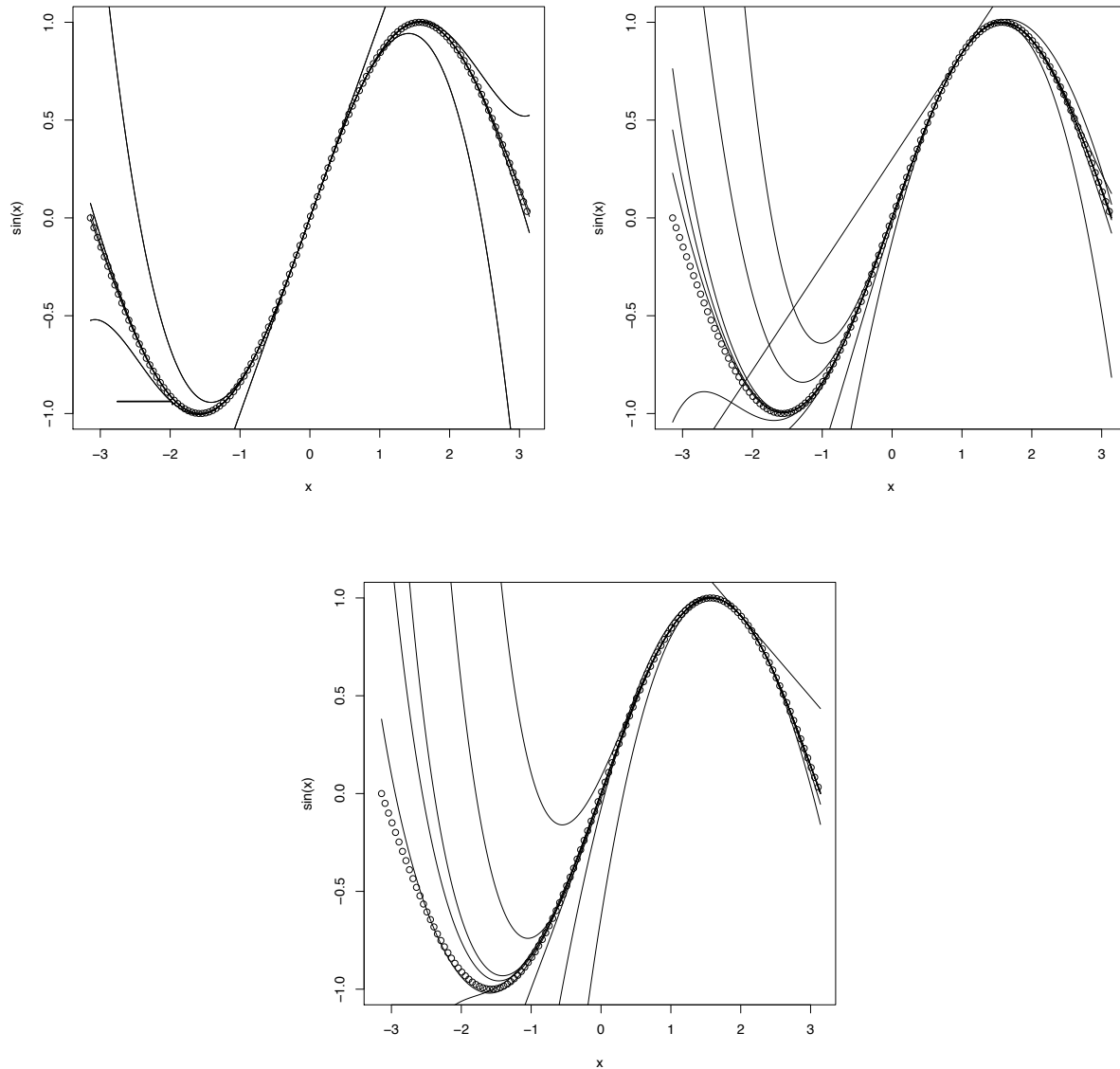


Figure 3.10 – Développement en série de la fonction $\sin(x)$ et son évolution en fonction du nombre de termes retenus dans le développement. Les trois panneaux correspondent à des développements autour de 0, 1 et 2, respectivement. Chacune des courbes correspond à l'ajout d'un terme dans la série, de 1 à 10. Les cercles correspondent à la valeur réelle de la fonction $\sin(x)$.

très prudent dans le choix de x_0 , alors que d'autres convergeront toujours quelque soit la valeur initiale de x_0 .

2. Développer la fonction en série de Taylor en x_0 en se limitant au premier terme :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \quad (3.10.2)$$

3. Trouver la racine de cette fonction linéaire, i.e. la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$, que nous appellerons x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}} \quad (3.10.3)$$

4. Vérifier que x_0 et x_1 est supérieur à une certaine tolérance, ϵ :

$$|x_1 - x_0| \geq \epsilon \quad (3.10.4)$$

5. Si oui, remplacer x_0 par x_1 et retourner en 3.

6. Si non, la racine de la fonction est égale à $x_0 = x_1$

A noter que pour que cette méthode itérative converge, il suffit que la fonction dont on calcule la racine soit monotone, c'est-à-dire qu'elle soit croissante ou décroissante et que sa dérivée première ne s'annule pas. En fait il suffit que la fonction soit monotone dans le voisinage de la racine.

Exemple : Trouver la racine de la fonction $x - e^{-x}$. Dans ce cas le développement en série limité au premier ordre est donné par :

$$f(x) = x - e^{-x} \approx f(x_0) + (x - x_0)(1 + e^{-x_0}) \quad (3.10.5)$$

et on peut écrire :

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}} \quad (3.10.6)$$

que l'on utilisera comme récurrence pour trouver, par itération, les valeurs suivantes de la racine de la fonction, en partant, par exemple, de $x_0 = 0 : 0 ; 0.333 ; 0.556 ; 0.567 ; 0.567$. On s'arrêtera en cette valeur si, par exemple, la tolérance ϵ , vaut 0.001.

3.11 Valeur approchée de la dérivée

On peut également utiliser le développement en série de Taylor pour estimer la valeur de la dérivée d'une fonction de façon approximative. En effet si nous nous limitons au premier terme du développement en séries, nous pouvons écrire :

$$f(x) \approx f(a) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=a} \quad (3.11.1)$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=a} \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.11.2)$$

Pour obtenir une bonne valeur de cette dérivée, nous devons choisir x dans le voisinage de a . On va choisir $x = a + \epsilon$ ou ϵ est très petit. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=a} \approx \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} \quad (3.11.3)$$

et nous retrouvons la définition de la dérivée donnée dans l'équation 3.4.1 à une petite différence près : nous n'en cherchons pas la limite, mais nous la calculons pour une valeur "faible" d' ϵ .

Mais quelle est l'utilité de cette démarche ? Elle est énorme : nous pouvons maintenant demander à un ordinateur ou une calculatrice de calculer la valeur de la dérivée de n'importe quelle fonction, même si nous n'en connaissons pas la forme analytique. Ainsi si la fonction est seulement connue en une série de N valeurs finies de x , appelons les $f_i = f(x_i)$, pour $i = 1, \dots, N$, nous pouvons en calculer la dérivée en prenant la différence entre deux valeurs consécutives de la fonction et en divisant le résultat par la différence des valeurs de x correspondantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.11.4)$$

On appellera cette approximation de la dérivée, l'approximation par "différence finie".

Appliquons ce résultat à la fonction $\ln(x)$, dont nous connaissons la dérivée, de telle sorte que nous puissions estimer la précision de la méthode par différence finie. Le résultat est montré dans la figure 3.11. On voit que la méthode numérique (par différence finie) d'estimation de la dérivée s'améliore en fonction du pas d'échantillonnage (ϵ). Plus il est petit plus l'estimation numérique est proche de la valeur analytique.

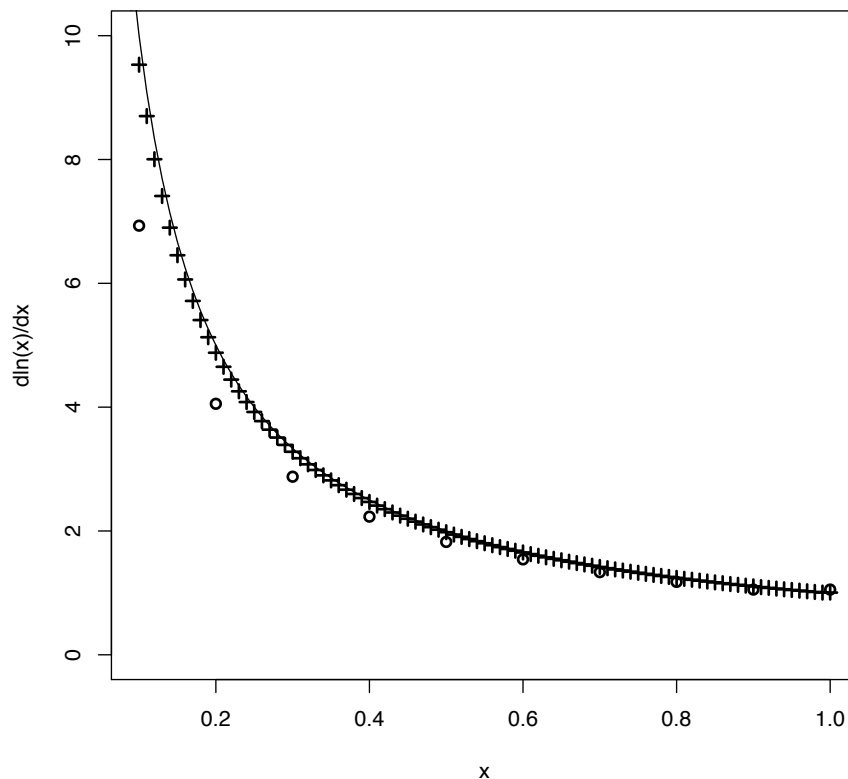


Figure 3.11 – Evaluation de la dérivée de la fonction $\ln(x)$ par différence finie, en utilisant un échantillonnage de $\epsilon = 0.1$ (cercles) et de $\epsilon = 0.01$ (croix). La solution analytique $1/x$ est représentée par la courbe fine.

Appliquons maintenant ce résultat à une série de mesures de l'écart de température global par rapport à 1850. Cette fonction est très bruitée; nous en prenons d'abord une moyenne glissante pour obtenir une courbe plus lisse. Nous appliquons ensuite la formule ci-dessus (3.11.4) pour obtenir une estimation de la vitesse à laquelle la température augmente. Les résultats sont montrés dans la figure 3.12. On remarque que l'estimation de la dérivée sur de vrais données/mesures par différence finie est assez bruitée car cette méthode amplifie toute la variabilité naturelle des données.

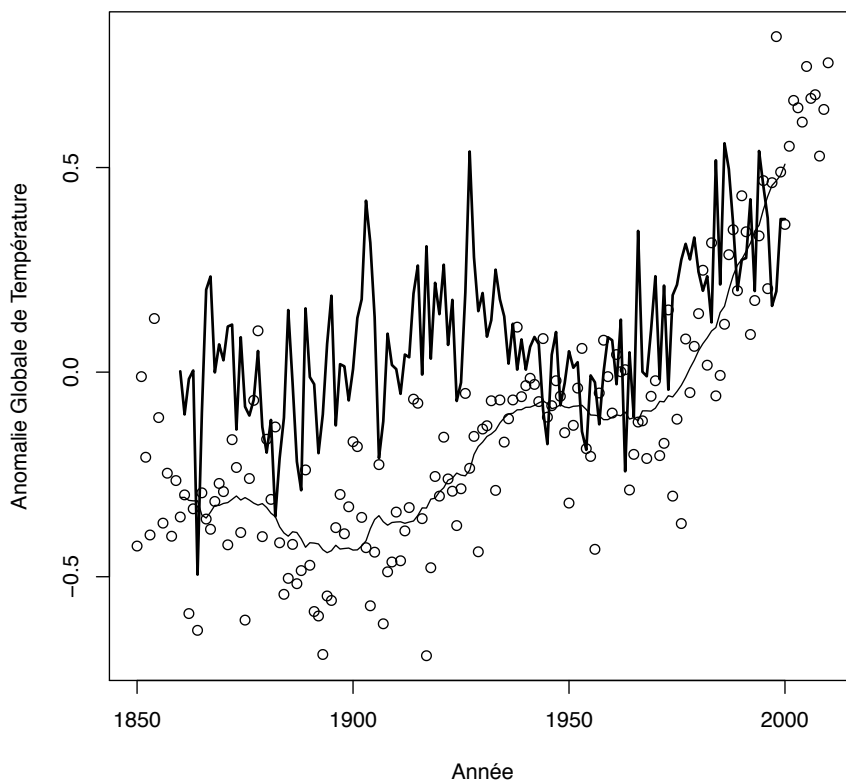


Figure 3.12 – Evaluation de la vitesse d’augmentation de température moyenne annuelle à partir d’une série de données (cercles ouverts). La série est d’abord lissée par moyenne glissante (courbe fine) et sa dérivée est obtenue par “différence finie” (courbe épaisse). On voit clairement l’accélération du réchauffement depuis la seconde guerre mondiale.

La notion d’approximation de la dérivée par la méthode des différences finies peut être généralisée aux dérivées d’ordre supérieur, et en particulier à la dérivée seconde, ce qui donne pour une série de valeurs de la fonction, f_i , équidistants et séparés par une valeur Δx :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.11.5)$$

3.12 Opérateurs différentiels

Revenons à la notion de pente le long d’un profil géographique. Nous avons vu que la dérivée de la fonction topographique, $h(x)$ par rapport à la distance x n’est autre que la pente de la surface. La

surface de la Terre est une fonction bi-dimensionnelle, c'est-à-dire qu'elle dépend de plusieurs variables. Appelons-les x et y , qui pourraient, par exemple, correspondre à la longitude et la latitude d'un point à la surface de la Terre.

La fonction topographie dépend maintenant de ces deux variables : $h(x, y)$. Nous pouvons donc calculer la variation de h en fonction de x et de y . Nous avons donc deux dérivées et donc deux pentes. Les mathématiciens ont alors introduit un vecteur bi-dimensionnel dont les composantes sont les deux valeurs de la dérivée. Ils l'ont appelé le vecteur gradient :

$$\mathbf{grad} h = \nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (3.12.1)$$

Une propriété importante de ce vecteur est qu'il pointe dans la direction des valeur croissante de h et est donc perpendiculaire aux contours (isobaths) de la fonction topographie, $h(x)$.

La notion de gradient peut se généraliser à trois dimensions. Prenons, par exemple, le cas de la fonction champ de température dans la croûte T qui varie en fonction des trois composantes géographique, x , y et z . Le gradient de température est le vecteur défini par :

$$\mathbf{grad} T(x, y, z) = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.12.2)$$

Il s'agit d'un vecteur tri-dimensionnel qui pointe dans la direction des températures croissantes. Il est perpendiculaire aux surfaces isothermes. Dans la Terre la température a toujours tendance à augmenter beaucoup plus en fonction de la profondeur de telle sorte que $\frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial x}$ ou $\frac{\partial T}{\partial y}$, que l'on va souvent négliger et donc utiliser le terme de gradient géothermique à la dérivée de la température par rapport à la coordonnée verticale, z , seule.

Considérons maintenant un champ vectoriel construit à partir de trois fonctions représentant chacune la variation spatiale d'une des composantes de ce vecteur. De tels champs sont très courant en physique ou en géologie. Par exemple un mouvement tectonique ou l'écoulement convectif du manteau se représentent par un champ vectoriel appelé la "vitesse" : \mathbf{v} . Ce champ a trois composantes (v_x, v_y, v_z) représentant la valeur de la vitesse dans les directions x , y et z , respectivement. Chacune de ces composantes peut être considérée comme une fonction qui varie en fonction de la position dans l'espace, c'est-à-dire les coordonnées x , y et z . Nous pouvons alors calculer la dérivée de chacune de ces composantes par rapport à chacune des coordonnées. Cela nous donne une matrice que l'on appellera la matrice du gradient de vitesse :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.12.3)$$

Nous y reviendrons plus tard. Nous pouvons également calculer une valeur scalaire à partir des dérivées des composantes d'un vecteur : la "divergence", définie comme suit :

$$\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.12.4)$$

La divergence de la vitesse est une mesure du changement de volume local. Ainsi un champ de vitesse dans un fluide incompressible obéit toujours à la relation suivante :

$$\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = 0 \quad (3.12.5)$$

3.13 Intégrales

Si nous connaissons la densité, ρ , d'un objet de volume V , nous pouvons facilement en déduire la masse, M_{\oplus} , par la relation simple :

$$M_{\oplus} = \rho V \quad (3.13.1)$$

Mais comment peut-on estimer cette masse si la densité n'est pas constante à l'intérieur de l'objet mais varie, par exemple, comme c'est le cas dans la Terre, en fonction de la distance en son centre ? Supposons d'abord que cette variation est simple : la densité vaut ρ_c dans la croûte, ρ_m dans le manteau et ρ_n dans le noyau. La masse de la Terre peut être estimée en additionnant les produit des densités par les volumes respectifs de la croûte, V_c , du manteau, V_m et du noyau, V_n :

$$M_{\oplus} = \rho_c V_c + \rho_m V_m + \rho_n V_n \quad (3.13.2)$$

Mais, dans la Terre, cette variation de densité est beaucoup plus subtile ; nous devons en fait considérer que la densité à l'intérieur de la Terre varie comme un fonction $\rho(r)$ de la distance au centre, r . Dans ce cas comment pouvons nous faire pour en calculer la masse ? Et bien les mathématiciens ont inventé un outil très utile pour y parvenir, il s'agit de "l'intégrale". L'intégrale est une façon de réaliser une somme des valeurs d'une fonction, $f(x)$, entre deux valeurs a et b de sa variable appelées "bornes". Mais comme ces valeurs ne sont pas "discrètes" - il y en a un nombre infini - ils ont eu recours à une autre notation qui définit l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.13.3)$$

où dx représente une variation infiniment petite (ou infinitésimale) de la variable x . On pourrait écrire :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x \quad (3.13.4)$$

où les valeurs x_i sont N valeurs équidistantes de la variable x entre les bornes a et b - et, par conséquent, $x_1 = a$ et $x_N = b$, et $\Delta x = (b - a)/(N - 1)$.

Donc pour calculer la masse de la Terre, il suffit de réaliser l'intégrale (ou la somme infinie) du produit de la densité par le volume de la calotte sphérique de rayon r et d'épaisseur dr , $V(r, dr)$:

$$M_{\oplus} = \int_0^{R_{\oplus}} \rho(r) V(r, dr) dr \quad (3.13.5)$$

pour toutes les valeurs possibles de r , c'est-à-dire depuis 0 au centre de la Terre, jusque R_{\oplus} , le rayon de la Terre (6371 km). Ce volume, $V(r, dr)$, est facilement calculé en soustrayant le volume d'une sphère de rayon r à une sphère de rayon $r + dr$:

$$\begin{aligned} V(r, dr) &= \frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3 - r^3) \\ &\approx \frac{4}{3}\pi(3r^2 dr) = 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (3.13.6)$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur à dr , car dr est infiniment petit. Ceci nous donne :

$$M_{\oplus} = \int_0^{R_{\oplus}} 4\pi \rho(r) r^2 dr \quad (3.13.7)$$

que l'on peut utiliser pour calculer la masse de la Terre en fonction sa densité, quelque soit la variation de cette densité, c'est-à-dire pour toutes valeurs/formes de la fonction densité $\rho(r)$.

Un autre exemple est le calcul de la quantité de chaleur, Q , contenue dans une chambre magmatique sphérique de rayon R ; nous l'obtenons facilement en intégrant la quantité de chaleur contenue dans chaque calotte sphérique de rayon r et à température $T(r)$:

$$Q = \int_0^R 4\pi \rho c T(r) r^2 dr \quad (3.13.8)$$

où ρ est de nouveau la densité et c la chaleur spécifique.

3.14 Calcul des intégrales

Mais comment calculer la valeur de ces intégrales? Pour y arriver les mathématiciens ont inventé une méthode (qui se démontre évidemment, mais pas par nous...). Cette méthode utilise la notion de "primitive" d'une fonction $f(x)$ qui est en quelque sorte, l'inverse de la notion de dérivée. Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $g(x)$, alors $f(x)$ est appelée la primitive de $g(x)$. La primitive de la fonction $g(x)$ se note :

$$\int g(x) dx \quad (3.14.1)$$

et l'on peut écrire :

$$f(x) = \int g(x) dx \quad \text{si } g(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3.14.2)$$

A noter que la primitive n'est jamais définie qu'à une constante additive près car si $f(x)$ est la primitive de $g(x)$, alors la fonction $f(x) + C$ est aussi une primitive de g car

$$\frac{\partial(f(x) + C)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = g(x) \quad (3.14.3)$$

Cela peut sembler étrange d'utiliser le même symbole pour la primitive et l'intégrale, mais la raison en est simple : comme indiqué ci dessus, on va utiliser la primitive d'une fonction pour en calculer son intégrale sur un intervalle entre les bornes a et b . La relation entre primitive et intégrale qui permet de calculer la valeur d'une intégrale est que l'intégrale d'une fonction entre deux bornes est simplement égale à la différence des valeurs de sa primitive aux deux bornes. Ainsi, cette relation s'écrit mathématiquement sous la forme simple :

$$\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx|_b - \int f(x) dx|_a \quad (3.14.4)$$

A noter que le fait que la primitive ne soit définie qu'à une constante près n'est pas un problème pour l'utiliser pour calculer la valeur d'une intégrale car celle-ci ne dépend que de la différence de la valeur de la primitive aux bornes ce qui a pour conséquence de voir se supprimer la constante.

Ainsi l'intégrale de la fonction linéaire x entre 0 et 1 vaut :

$$\int_0^1 x dx = \int x dx|_1 - \int x dx|_0 \quad (3.14.5)$$

La primitive de la fonction x est la fonction dont la dérivée est x . C'est donc, à une constante additive près, la fonction $x^2/2$, car :

$$\frac{\partial(x^2/2)}{\partial x} = x \quad (3.14.6)$$

Et nous pouvons en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 x \, dx = \int x \, dx|_1 - \int x \, dx|_0 = (x^2/2)|_1 - (x^2/2)|_0 = 1/2 \quad (3.14.7)$$

Dans le tableau 3.3, nous donnons la forme des primitives de quelques fonctions usuelles.

Nom	Fonction	Primitive
Constante	a	$ax + C$
Linéaire	x	$x^2/2 + C$
Quadratique	x^2	$x^3/3 + C$
Puissance	x^n	$x^{n+1}/(n+1) + C$
Inverse	$1/x$	$\ln x + C$
Exponentielle	e^x	$e^x + C$
Logarithme népérien	$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$
Exposant	$a^x = e^{x \ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
Sinus	$\sin x$	$-\cos x + C$
Cosinus	$\cos x$	$\sin x + C$
Tangente	$\tan x = \sin x / \cos x$	$-\ln(\cos x) + C$
Arcsinus	$\arcsin x$	$\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + C$
Arccosinus	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
Arctangente	$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$
Sinus hyperbolique	$\sinh x$	$\cosh x + C$
Cosinus hyperbolique	$\cosh x$	$\sinh x + C$
Tangente hyperbolique	$\tanh x$	$\ln(\cosh x) + C$
Arcsinus hyperbolique	$\operatorname{arcsinh} x$	$x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + C$
Arccosinus hyperbolique	$\operatorname{arccosh} x$	$x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x-1} \sqrt{x+1} + C$
Arctangente hyperbolique	$\operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + x \operatorname{arctanh} x + C$

Table 3.3 – Exemples de fonctions et de leurs primitives

L'intégrale jouit de quelques propriétés intéressantes :

$$\begin{aligned} \int_a^b C f(x) \, dx &= C \int_a^b f(x) \, dx \\ \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned} \quad (3.14.8)$$

Il existe une autre propriété graphique de l'intégrale qui nous permet d'un peu mieux l'appréhender. En effet si l'on dessine la fonction $f(x)$ dans un simple diagramme $f(x)$ en fonction de x , comme illustré dans la figure 3.13, la valeur de l'intégrale de $f(x)$ entre les bornes a et b n'est rien d'autre que l'aire de la surface comprise entre la fonction et l'axe des x (axe des abscisses) et les droites verticales

(parallèles à l'axe des ordonnées) passant par les bornes de l'intégrale a et b reportées sur l'axe des x . Si la fonction prend des valeurs négatives - elle passe sous l'axe des x - l'aire correspondante est négative.

On peut appliquer ce résultat à l'intégrale de la fonction linéaire que nous avons calculée ci-dessus pour en déduire que l'aire d'un triangle de hauteur 1 et de base 1 est égale à $1/2$.

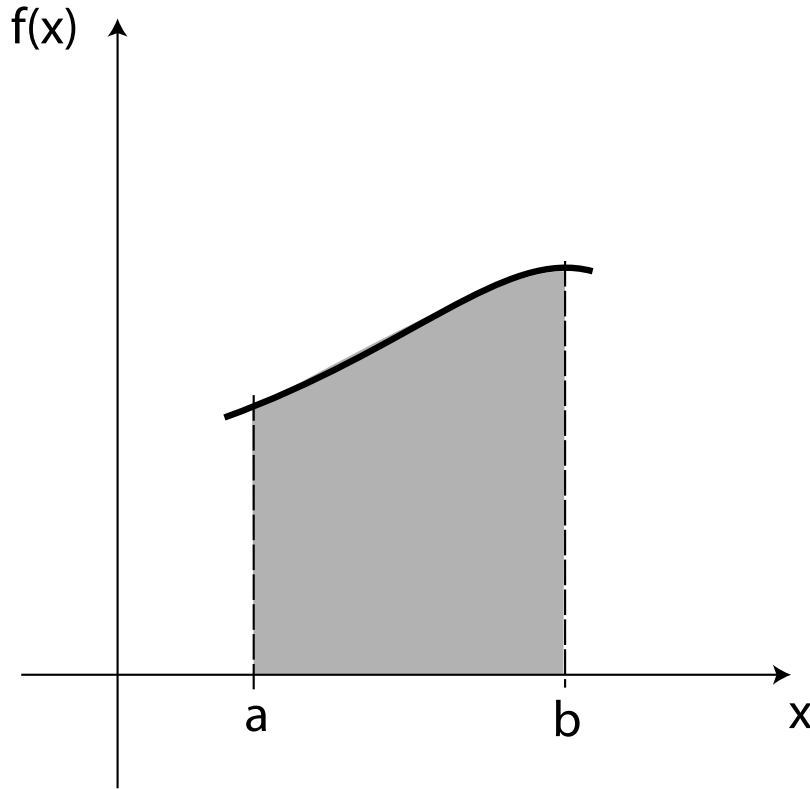


Figure 3.13 – Interprétation graphique de l'intégrale. La valeur de l'intégrale de la fonction $f(x)$ (trait gras) entre les bornes a et b (trait verticaux pointillés) est égale à l'aire de la surface grisée comprise entre la fonction et l'axe des s .

Finalement, il est important de noter que les dimensions de l'intégrale sont celle de la fonction multiplié par les dimensions de la variable d'intégration. Pour illustrer ce dernier point, essayons de trouver la masse de la Terre en supposant que sa densité augmente linéairement de $\rho_s = 3000 \text{ kg/m}^3$ à la surface jusqu'à $\rho_b = 6000 \text{ kg/m}^3$ en son centre. Dans ce cas la masse de la Terre est (en suivant la relation obtenue en 3.13.7) :

$$\begin{aligned}
 M_{\oplus} &= \int_0^{R_{\oplus}} 4\pi(\rho_s + (\rho_b - \rho_s)r/R_{\oplus}) r^2 dr \\
 &= 4\pi\rho_s \int_0^{R_{\oplus}} r^2 dr + \frac{4\pi(\rho_b - \rho_s)}{R_{\oplus}} \int_0^{R_{\oplus}} r^3 dr \\
 &= 4\pi\rho_s \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{R_{\oplus}} - \frac{r^3}{3} \Big|_0 \right) + \frac{4\pi(\rho_b - \rho_s)}{R_{\oplus}} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_{R_{\oplus}} - \frac{r^4}{4} \Big|_0 \right) \\
 &= \frac{4\pi\rho_s R_{\oplus}^3}{3} + \pi(\rho_b - \rho_s)R_{\oplus}^3 \approx 3.25 \times 10^{24} + 2.44 \times 10^{24} \text{ kg/m}^3 \times \text{m}^3 = 3.7 \times 10^{24} \text{ kg}
 \end{aligned} \tag{3.14.9}$$

à comparer à la masse réelle de la Terre qui est de 5.9736×10^{24} kg

3.15 Valeur approchée de l'intégrale

Supposons que la fonction à intégrer n'est connue qu'en un nombre fini de points, $f(x_i) = f_i$, par exemple la valeur d'une grandeur que nous avons mesurée à intervalles réguliers ($x_i = i\Delta x$) comme la distance entre deux réflecteurs le long d'une coupe sismique. Dans ce cas, l'intégrale de la fonction est l'aire (ou le volume) des sédiments déposés en un certain intervalle de temps. On voit de suite qu'une valeur approximative de l'intégrale peut être obtenue par la somme de rectangles de hauteurs f_i et de largeur Δx :

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^N f_i \quad (3.15.1)$$

où N est le nombre de mesures, comme illustré dans la figure 3.14a. Cette approximation peut être améliorée si l'on remplace les rectangles par des trapèzes. On obtient alors la formule des trapèzes :

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx \Delta x (f_1/2 + \sum_{i=2}^{N-1} f_i + f_N/2) \quad (3.15.2)$$

comme illustré dans la figure 3.14b.

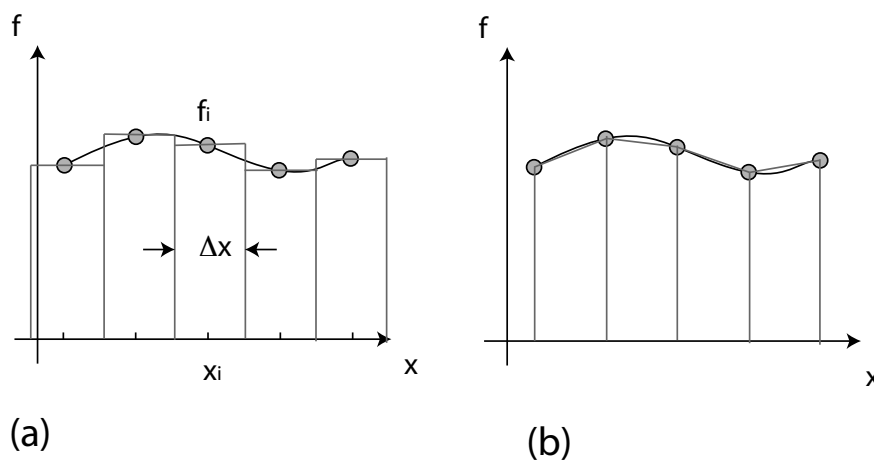


Figure 3.14 – Deux manières approximatives d'intégrer une fonction, $f(x)$, connue en un nombre fini de points, $x_i, i = 1, \dots, N$. (a) Méthode des rectangles et (b) méthode des trapèzes.

3.16 Intégrales multiples

Nous avons vu qu'une intégrale est un scalaire, c'est à dire une grandeur qui ne dépend plus de la variable d'intégration. On peut donc la regarder comme une opération qui transforme une fonction en une constante. Si une fonction dépend de plusieurs variables, on peut l'intégrer par rapport à une de ces variables ; le résultat sera une autre fonction qui dépendra uniquement des autres variables. Ainsi si la fonction $f(x, y)$ dépend des variables x et y et si on l'intègre entre a et b par rapport à x , le résultat sera une fonction de y seulement. Cette nouvelle fonction pourra alors à son tour être intégrée

par rapport à y entre d'autres bornes, d et f par exemple, pour livrer une constante. Ainsi on notera cette double intégration sous la forme suivante (et assez logique) :

$$\int_d^f \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \tag{3.16.1}$$

Cette double intégration jouit d'une belle propriété : l'ordre dans lequel se fait l'intégration n'a pas d'importance. Ainsi :

$$\int_d^f \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_d^f f(x, y) dy \right) dx \tag{3.16.2}$$

sauf si les bornes de l'intégration interne dépende de la variable externe comme dans le cas suivant :

$$\int_d^f \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy \tag{3.16.3}$$

Dans ce cas il faut respecter l'ordre d'intégration.

A quoi servent ces intégrations multiples ? En autres à calculer des intégrales sur une surface. Pour illustrer ce point, prenons un exemple. Supposons en effet que nous voulions calculer le volume de sol contenu sur une colline. Nous avons fait un grand nombre de mesure d'épaisseur de sol pour en tirer une loi nous donnant l'épaisseur $s(x, y)$ en fonction de la position sur la colline, x et y . Par exemple, nous sommes arrivés à la conclusion que cette épaisseur varie comme la racine cubique de la distance x choisie dans la direction de plus forte pente du sommet de la colline vers sa base. Cette racine cube peut s'expliquer à partir de lois de transport non linéaires du sol. On peut donc écrire :

$$s(x) = s_0 \sqrt[3]{x/L} \tag{3.16.4}$$

où $s_0 = 1.2$ m est l'épaisseur maximale de sol en bas de la colline de longueur $L = 123$ m. Nous voudrions connaître le volume de sol sur une surface carrée de 10×10 m² au sommet de la colline. Pour cela nous pouvons intégrer l'épaisseur sur cette surface :

$$\begin{aligned} \int_0^{10} \int_0^{10} s(x) dx dy &= \frac{10s_0}{\sqrt[3]{L}} \int_0^{10} \sqrt[3]{x} dx = \frac{10s_0}{\sqrt[3]{L}} \int_0^{10} x^{1/3} dx \\ &= \frac{10s_0}{\sqrt[3]{L}} \frac{3}{4} (x^{4/3})|_0^{10} = \frac{10s_0}{\sqrt[3]{L}} \frac{3}{4} (10^{4/3}) \approx 39 \text{ m}^3 \end{aligned} \tag{3.16.5}$$

3.17 Relations de Gauss

On peut également calculer une intégrale à l'intérieur d'un volume en effectuant une intégrale triple :

$$\int_g^h \int_d^f \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \tag{3.17.1}$$

Notons que par paresse, on écrira souvent ces doubles et triples intégrales de la façon suivante, pour simplifier mais aussi pour se rappeler qu'elles sont bien des intégrales sur des surfaces, S , ou des volumes, V :

$$\int_S f dS \quad \text{et} \quad \int_V f dV \tag{3.17.2}$$

Nous terminons cette partie sur les intégrales en donnant une relation très utile combinant intégrales et opérateurs différentiels. Il s'agit du théorème de Gauss-Ostrogradski qui nous dit que

l'intégrale volumique de la divergence d'un champ vectoriel, \mathbf{u} peut être calculée à partir de l'intégrale de la composante normale de ce champ le long de la surface du volume. Mathématiquement :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS \quad (3.17.3)$$

où S est la surface de V . L'opération $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ signifie que l'on projette le vecteur vitesse sur le vecteur normal à la surface S ou que l'on ne considère que la composante de \mathbf{u} normale à la surface.

3.18 La limite d'une fonction

Il existe de nombreuses situations pour lesquelles nous voudrions connaître la valeur d'une fonction en une valeur singulière, c'est-à-dire une valeur où elle ne semble pas définie. Par exemple que vaut la fonction $1/x$ lorsque x prend des valeurs très grandes ("infinies") ? Que vaut la fonction $\sin x/x$ lorsque x devient proche de 0. A priori nous n'avons pas de réponse exacte, mais nous pouvons parler de valeur "limite" de la fonction lorsque la variable approche de la valeur singulière. Ainsi dans le premier cas on écrira :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (3.18.1)$$

et dans le second cas (nous verrons comment on peut montrer ce résultat plus loin) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.18.2)$$

Il y a plusieurs façons d'estimer des limites. Pour nous la plus simple sera d'utiliser une calculatrice et de simplement calculer la valeur de la fonction à proximité de la valeur singulière, par exemple en lui ajoutant ou soustrayant un tout petit nombre (0.00001) ou, si la valeur singulière est $+\infty$ ou $-\infty$ en calculant la valeur de la fonction en des valeurs très grandes, positives ou négatives. En général cela fonctionnera, mais ce n'est pas garanti.

Sinon, il y a quelques règles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x} = 0 \quad (3.18.3)$$

où c est une constante finie. Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{c} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{c} = -\infty \quad (3.18.4)$$

Il existe des cas indéterminés où la fonction semble évoluer vers $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{\infty}{0}$ ou $\frac{0}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$. Dans ces cas, on peut utiliser le théorème de l'Hospital, qui dit que :

$$\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_x \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\frac{\partial g(x)}{\partial x}} \quad (3.18.5)$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = ? \quad (3.18.6)$$

peut s'obtenir en appliquant le théorème :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad (3.18.7)$$

3.19 Points importants à retenir

1. A quoi sert de représenter une grandeur physique, chimique ou géologique par une fonction
2. Toute variation d'une grandeur par rapport à une autre peut être représentée par une fonction
3. Forme de la fonction linéaire et de la fonction quadratique
4. Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction et à quoi sert-elle ?
5. Qu'est-ce que la dérivée seconde d'une fonction et à quoi sert-elle ?
6. Connaître la forme, la dérivée et les propriétés de base de quelques fonctions essentielles
7. Comprendre la notion de fonction de plusieurs variables
8. Connaître et utiliser les règles de dérivation des fonctions (somme, produit, quotient, fonctions composées, fonctions de plusieurs variables)
9. Connaître la formule du développement en série de Taylor et savoir l'utiliser
10. Savoir utiliser l'approximation de la dérivée et de la dérivée seconde par la méthode des différences finies
11. Connaître la définition et l'utilité des opérateurs gradient et divergence
12. Comprendre la notion d'intégrale et savoir l'utiliser pour résoudre des problèmes en géologie
13. Connaître et savoir utiliser la méthode de la primitive pour calculer la valeur d'une intégrale
14. Comprendre l'interprétation géométrique d'une intégrale
15. Savoir calculer la valeur approchée de l'intégrale d'une fonction connue en un nombre fini de points
16. Comprendre la notion d'intégrale multiple
17. Comprendre la signification du théorème de Gauss-Ostrogradski
18. Comprendre la notion de limite à proximité d'une valeur singulière
19. Savoir estimer une limite sur une calculatrice
20. Savoir utiliser les quelques règles simples de calcul des limites des fonction, y compris le théorème de l'Hospital

3.20 Travaux Dirigés

Exercice 7

Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \sin x \\
 & \sin 2x \\
 & 2 \sin x \\
 & \sin^2 x \\
 & \sin x + \cos x \\
 & \sin x \cos x \\
 & \frac{\sin x}{\cos x} \\
 & \sin(x + x^2) \\
 & \sin \sqrt{x} \\
 & \sqrt{\sin x}
 \end{aligned} \tag{3.20.1}$$

, Exercice 8

En quels valeurs de x la fonction suivante rencontre-t-elle un minimum et un maximum :

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 6 \tag{3.20.2}$$

Exercice 9

Calculez la dérivée seconde des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \sin x \\
 & \sin 2x \\
 & 2 \sin x \\
 & \sin^2 x \\
 & \sin x + \cos x \\
 & \sin x \cos x \\
 & \frac{\sin x}{\cos x} \\
 & \sin(x + x^2) \\
 & \sin \sqrt{x} \\
 & \sqrt{\sin x}
 \end{aligned} \tag{3.20.3}$$

Exercice 10

En supposant que la température moyenne journalière est maximale le 15 août, à quel moment de l'année augmente-t-elle le plus rapidement ?

Exercice 11

L'accélération de la gravité, g , à la surface de la Terre nous est donnée par la loi d'attraction universelle appliquée à la Terre :

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (3.20.4)$$

En vue de corriger les données de mesure de g de l'effet d'altitude, estimez la correction à apporter à g par mètre d'altitude. Appliquez cette correction pour des mesures faites à 250 m and 765 m d'altitude. Exprimez le résultat en unité SI et en unités de mesure de gravité par les géologues (le mgal ou le μgal) en sachant que $1 \text{ gal} = 0.01 \text{ m/s}^2$.

Exercice 12

Déterminez la valeur du travail effectué lors du mouvement le long d'une faille de pendage θ menant à une quantité d'extension nette (et infinitésimale) d d'un bloc d'épaisseur L . On supposera que ce travail est proportionnel à la longueur de la faille et au déplacement le long de la faille. En déduire l'angle optimal minimisant le travail effectué. Comparez votre résultat aux angles communément observés.

Exercice 13

Développez la fonction $\ln x$ en série de Taylor exprimée autour de la valeur de la fonction et de ses dérivées en $x = 1$. Dessinez sur un graphe la forme de la fonction obtenue en se limitant aux termes d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5. Comparez les à la forme exacte de la fonction dans l'intervalle $[0, 2]$.

Exercice 14

Trouvez la valeur de x pour laquelle les relations suivantes sont vérifiées :

1.

$$x^2 = -\ln x \quad (3.20.5)$$

2.

$$\sin x = \cos x \quad (3.20.6)$$

Exercice 15

On sait que depuis la fin du Miocène, on a érodé 1 km de roches du plateau sud africain sur une surface A_p . A quelle épaisseur de sédiments cela va-t-il correspondre dans le bassin sédimentaire adjacent, de surface A_s . On supposera la loi de porosité suivante :

$$\phi = \phi_0 e^{-z/z_0} \quad (3.20.7)$$

où ϕ est la porosité, z la profondeur dans le bassin sédimentaire, mesurée à partir de la surface (interface eau-sédiments) et ϕ_0 et z_0 deux constantes égales à 0.6 et 1800 m, respectivement. Pour la simplicité de l'exercice, on supposera que le rapport $A_p/A_s = 1$.

Exercice 16

Le tableau 3.4 donne des valeurs de température mesurées toutes les deux heures à Lyon au printemps. Déterminez le moment de la journée où la température accélère et décélère le plus.

Table 3.4 – Température à Lyon

Temps (heure)	Température (C°)
0	10.8
2	10.4
4	11.7
6	14.0
8	16.0
10	17.6
12	18.0
14	17.8
16	16.4
18	14.2
20	12.3
22	11.8
24	10.8

Exercice 17

Sur la carte de la figure 3.15, représenter le gradient de topographie par des vecteurs reportés sur une grille régulière. On choisira de représenter ces vecteurs dans la direction opposée au gradient topographique afin qu'ils représentent la direction de plus grande pente en chaque point de la grille. Utilisez la carte pour en extraire le profil de la Rivière principale (celle qui ne porte pas de nom), du Ruisseau du Vallon des Etages et du Ruisseau des Males.

En géologie, il est très souvent nécessaire d'estimer le volume d'objets de forme complexe, par exemple pour déterminer le volume d'un dépôt minier. On est également souvent amené à déterminer l'intégrale d'une valeur (densité) au sein de ces volumes, par exemple, la quantité de minerai exploitable à partir de mesure de la densité de ce minerai dans le gisement.

En intégrant la fonction unité sur un objet, on obtient le volume de cet objet. Pour le vérifier, tentons d'obtenir les différentes formules des volumes suivants : la sphère, le cylindre et le cône circulaires, ainsi que les formules des volumes de tout cylindre ou cône de hauteur h dont nous connaissons l'aire de la base.

Exercice 18

Le cylindre. Considérons un cylindre de hauteur h et de base circulaire de rayon R . Cette géométrie est illustrée dans la figure 3.16.

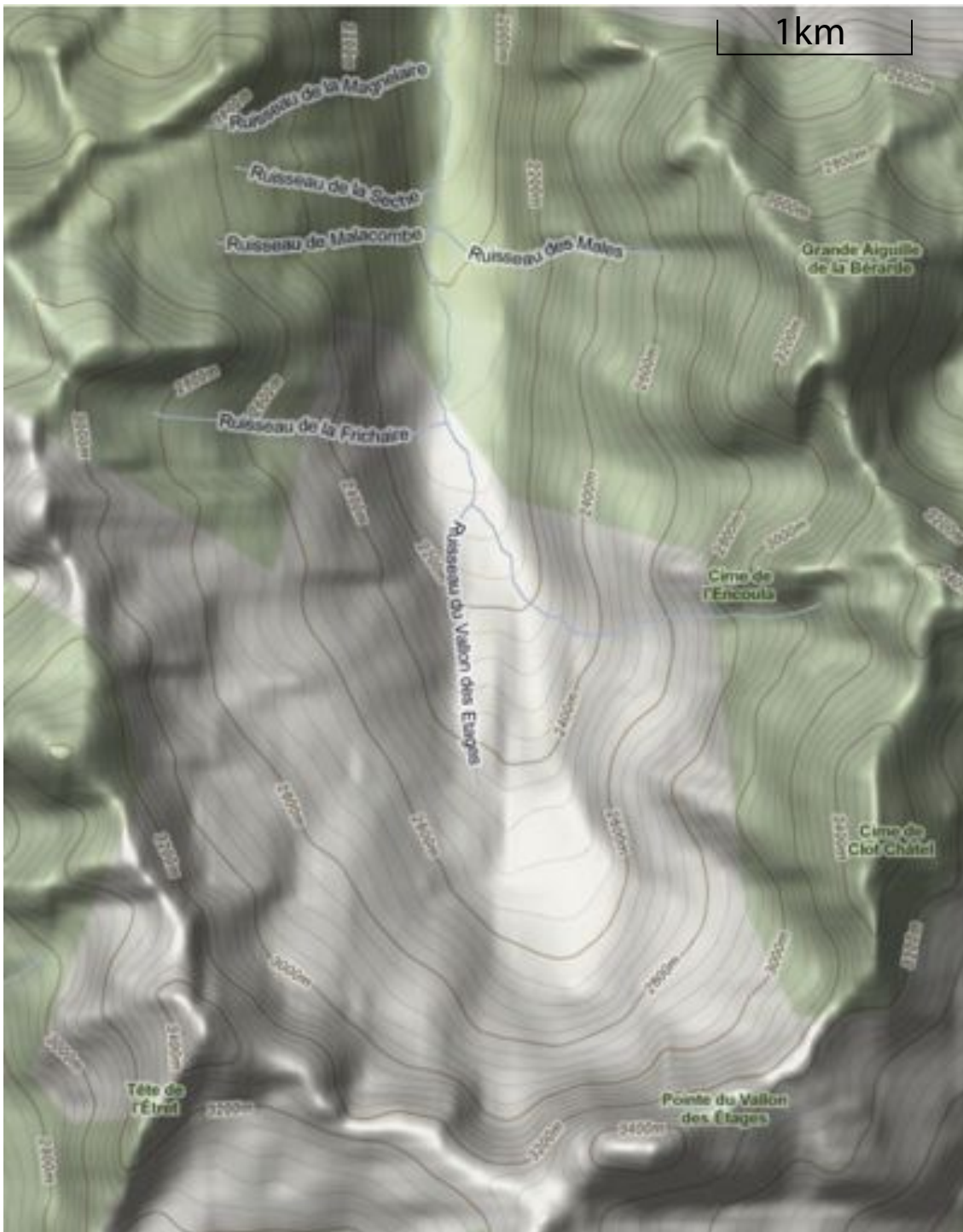


Figure 3.15 – Carte topographique. Contours sont donnés pour des valeurs de la topographie espacés de 20m.

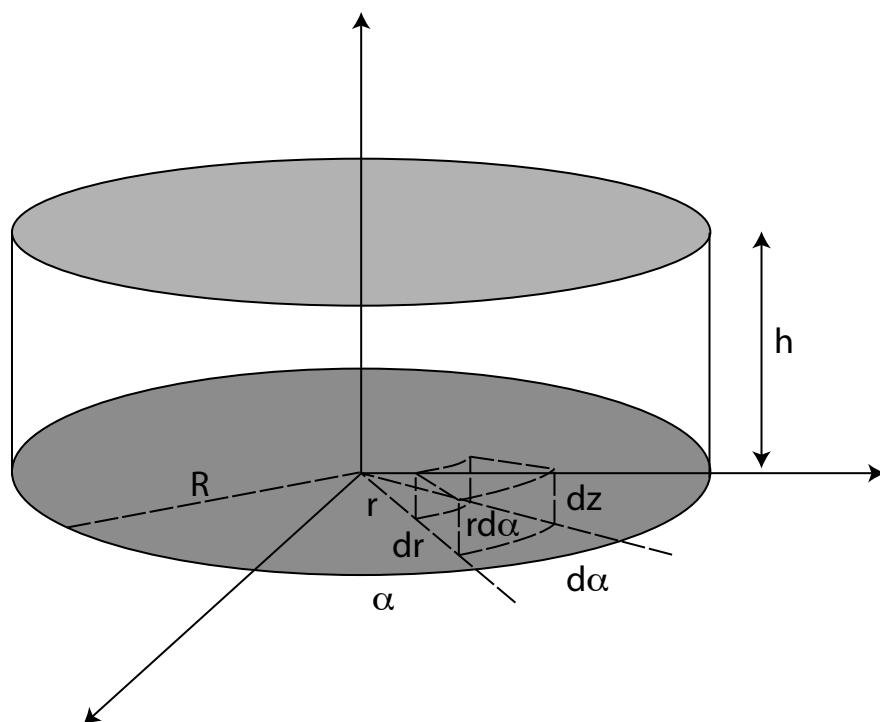


Figure 3.16 – Géométrie d'un cylindre a base circulaire. Petit volume (infinitésimal) à intégrer sur les valeurs possibles de r , α et z .

Exercice 19

Effectuez le même calcul pour un cône droit de hauteur h et de base de rayon R , ainsi que pour une sphère de rayon R .

Exercice 20

Dans un gisement récemment acquis, on a estimé que la densité de minerai exploitable, ρ , diminue en fonction de la profondeur :

$$\rho(z) = \rho_0(1 - z/L) \quad (3.20.8)$$

Le propriétaire de la mine dispose d'une surface exploitable de dimensions horizontales 10×20 km. En supposant que la densité du minerai est de 0.12 g/m^3 , et que la profondeur maximale d'exploitation, L , est de 1.5 km, pouvez-vous estimer la masse totale de minerai dans la concession.

Exercice 21

Effectuez le même calcul en supposant que la densité varie comme l'exponentielle de la profondeur :

$$\rho = \rho_0 e^{-z/L} \quad (3.20.9)$$

Dans ce cas supposez qu'il n'y a pas de profondeur maximale d'exploitation. Prenez $\rho_0 = 0.05 \text{ g/m}^3$ et $L = 500 \text{ m}$

Exercice 22

Revenons à l'exercice (4) sur l'évolution du prix d'extraction et de vente d'un minerai du premier

chapitre. Pendant la période d'exploitation de la mine, le taux d'extraction de minerai est de 120 tonnes par jour. En déduire le profit brut qu'aura fait la compagnie minière sur cette même période.

Exercice 23

Toutes les heures, un membre d'une équipe de Greenpeace mesure la quantité d'arsenic s'échappant

Table 3.5 – Flux d'arsenic dans la rivière Fly

Temps (heure)	Flux d'arsenic ($\mu\text{g}/\text{min}$)
0	0.11
1	0.13
2	0.11
3	0.13
4	0.10
5	0.21
6	0.32
7	0.52
8	0.75
9	0.84
10	0.81
11	0.61
12	0.75
13	0.82
14	0.90
15	0.82
16	0.78
17	0.75
18	0.52
19	0.32
20	0.21
21	0.17
22	0.15
23	0.13
23	0.10

d'une exploitation minière dans la rivière Fly en Papouasie Nouvelle Guinée. Ses données sont reportées dans le tableau 3.5. Estimez la quantité d'arsenic qui s'est échappée en une journée en intégrant les données horaires.

Exercice 24

Calculer la valeur des limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\cos x}{x - \pi/2} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln x) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} \end{aligned} \tag{3.20.10}$$

Equations Différentielles

4.1 Objectifs

- Introduire la notion d'équation différentielle
- Dériver et comprendre l'équation de décroissance radioactive
- En trouver une solution simple et utile en géochronologie
- Dériver et comprendre l'équation de diffusion
- Dériver une solution simple pour comprendre le géotherme continental
- Dériver et comprendre l'utilité de la forme sans dimension de l'équation
- Comprendre et utiliser la notion de temps de diffusion et l'appliquer à la subsidence thermique des bassins

4.2 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre sur l'étude des fonctions que la dérivée permet de quantifier de façon précise la façon dont une grandeur, la température, l'altitude, varie en fonction de variables telles que le temps ou l'espace. Notons que la dérivée nous permet de considérer toute variation d'une grandeur par rapport à une autre, mais en géologie, nous serons surtout intéressés par les variations de grandeurs par rapport au temps ou à l'espace.

Prenons l'exemple de la forme du relief que le géodésien (spécialiste de la description fine de la forme de la Terre) décrit souvent comme une fonction h qui dépend de deux coordonnées spatiales x et y . Ces coordonnées peuvent être orientées de façon arbitraire ; nous choisirons typiquement d'orienter x dans la direction est-ouest (l'axe des x pointant vers l'est) et y dans la direction nord-sud (l'axe des y pointant vers le nord). On peut également faire le choix d'appeler ces coordonnées la longitude et la latitude car localement (c'est-à-dire à une échelle suffisamment petite pour que la courbure de la terre soit négligeable) ces coordonnées suivent un plan tangent à la surface de la Terre. En tout point du paysage (c'est-à-dire en tout point de coordonnée x,y), la dérivée de la fonction h par rapport à x , que nous notons $\frac{\partial h}{\partial x}$, devient simplement la pente locale dans la direction est-ouest et la dérivée de la fonction h par rapport y , que nous notons $\frac{\partial h}{\partial y}$, est la pente locale dans la direction nord-sud.

Pour le géomorphologue, qui s'intéresse aux processus responsables de la formation du relief, il

considèrera que h variera en fonction du temps : h diminue par érosion ou subsidence tectonique et augmente par sédimentation ou surrection tectonique. La dérivée de la fonction h par rapport au temps t , que nous notons $\frac{\partial h}{\partial t}$, est donc simplement la vitesse de surrection, si elle est positive, ou vitesse de subsidence, si elle est négative, de la surface.

De nombreuses autres grandeurs (ou fonctions) sont considérées en géologie : la température à l'intérieur de la Terre, la vitesse d'une plaque tectonique, l'intensité du champ magnétique, etc. Il est important de bien comprendre, comme nous avons déjà essayé de le faire dans le chapitre sur l'étude des fonctions, que les fonctions ne sont pas juste des objets que l'on peut représenter par un diagramme simple du type $x \rightarrow f(x)$, mais qu'elles correspondent à des grandeurs (1) que nous voulons décrire de manière quantitative et (2) pour lesquelles nous désirons exprimer les lois physiques qui régissent leur distribution dans l'espace et leur évolution dans le temps. Par exemple, nous voulons connaître ou prédire la façon dont la température augmente avec la profondeur (le "géotherme"), ou savoir comment la concentration d'un élément radioactif décroît en fonction du temps, par exemple depuis la formation du système solaire. Puisque la dérivée exprime la variation d'une grandeur par rapport à l'espace ou au temps, ce sera donc l'outil de base qui va nous permettre d'écrire des équations décrivant les processus physiques ; on appelle ces équations des *équations différentielles*.

Dans ce chapitre, nous allons, dans un premier temps, en dériver quelques unes ; puis nous verrons comment nous pouvons les utiliser pour mieux comprendre le comportement d'un système physique ; pour cela nous étudierons la forme de l'équation, essayerons d'en trouver une solution analytique (c'est-à-dire que l'on peut exprimer sous la forme de fonctions simples ou élémentaires, comme le sinus, une exponentielle, un polynôme d'ordre 2, etc.) et envisagerons des façons d'en obtenir une solution approximative lorsqu'une solution analytique n'existe pas.

4.3 Décroissance radioactive

Par la mesure, les physiciens nous ont montré que la décroissance radioactive naturelle du Potassium (K) mène à la production d'Argon (Ar)¹. De plus la vitesse de décroissance ne dépend que de la concentration de K. Le K est très répandu dans les roches crustales tandis que l'Ar est un gaz rare, c'est-à-dire qu'il ne réagit pas chimiquement. Cette décroissance est très importante pour le géologue car elle va nous permettre de dater les roches. Mais pour arriver à transformer des mesures de concentrations de K et d'Ar dans la roche en âge, nous devons d'abord décrire comment la concentration de ces deux espèces va évoluer en fonction du temps.

Si nous appelons C_K la concentration en K et C_{Ar} la concentration en Ar dans une roche donnée, nous pouvons considérer que ces valeurs sont des fonctions du temps car elles évoluent au cours du temps. La vitesse à laquelle la concentration en K varie est donnée par la dérivée de la fonction C_K par rapport au temps : $\frac{\partial C_K}{\partial t}$; de même $\frac{\partial C_{Ar}}{\partial t}$ nous donne la vitesse à laquelle la concentration en Ar varie.

1. Pour être exact, il s'agit de la fission de l'isotope 40 du K produisant l'isotope 39 de l'Ar

4.4 Dérivation de l'équation différentielle

L'observation des physiciens atomistes que la vitesse de décroissance du K est proportionnel à sa concentration s'écrit, en utilisant la fonction C_K et sa dérivée $\frac{\partial C_K}{\partial t}$, de la façon suivante :

$$\frac{\partial C_K}{\partial t} \propto C_K \quad (4.4.1)$$

Typiquement, on introduit ici une constante de proportionnalité, α :

$$\frac{\partial C_K}{\partial t} = -\alpha C_K \quad (4.4.2)$$

le signe moins indiquant que la vitesse de changement de la concentration en K (la dérivée de la fonction C_K) doit être négative car cette concentration décroît toujours en fonction du temps. De cette façon la constante, α , est un nombre positif. La relation 4.4.2 est notre première équation différentielle ; elle lie la valeur de la fonction C_K à sa dérivée par rapport au temps $\frac{\partial C_K}{\partial t}$.

Nous pouvons très rapidement en déduire une autre équation différentielle, celle décrivant la croissance de l'élément fils, l'Ar, puisque l'on sait que, à chaque décroissance d'un atome de K, un atome d'Ar est produit. Nous pouvons donc écrire que la somme des deux concentrations est constante. Puisque les seules mesures directes que nous pouvons faire de ces concentrations est celles dans la roche aujourd'hui (C_K^{now} et C_{Ar}^{now}), nous allons écrire :

$$C_K + C_{Ar} = C_K^{now} + C_{Ar}^{now} \quad (4.4.3)$$

De plus, lors de la formation de la roche, celle-ci ne contenait pas d'Ar, nous pouvons également écrire :

$$C_K + C_{Ar} = C_K^{formation} \quad (4.4.4)$$

où $C_K^{formation}$ est la concentration initiale en K dans la roche, au moment de sa formation, moment que nous allons appeler l'âge de la roche ou t_a . Finalement, nous pouvons écrire :

$$C_K = C_K^{formation} - C_{Ar} \quad (4.4.5)$$

et, en prenant la dérivée par rapport au temps de cette relation :

$$\frac{\partial C_K}{\partial t} = -\frac{\partial C_{Ar}}{\partial t} \quad (4.4.6)$$

En combinant 4.4.2, 4.4.5 et 4.4.6, nous obtenons notre deuxième équation différentielle :

$$\frac{\partial C_{Ar}}{\partial t} = -\alpha(C_{Ar} - C_K^{formation}) \quad (4.4.7)$$

4.5 Condition initiale

Notons que chacune de ces équation est valable à tout instant (c'est-à-dire pour n'importe quelle valeur de la variable t), mais qu'elle ne nous donne pas directement la valeur de la concentration ; elle ne décrit que l'évolution du système (comment évolue la concentration de K en fonction du temps). Pour en déduire la valeur de cette concentration en n'importe quel instant t (ce qui est plus intéressant), nous devons simplement supposer que nous la connaissons en un instant quelconque (typiquement en

un instant initial) et nous utilisons l'équation différentielle pour en déduire son évolution à partir de cet instant.

Dans le cas du K , nous supposons que :

$$C_K = C_K^f \quad \text{en } t = 0 \quad (4.5.1)$$

et dans le cas de l'Ar, nous supposons que :

$$C_{Ar} = 0 \quad \text{en } t = 0 \quad (4.5.2)$$

Remarquons que nous avons défini l'origine des temps ($t = 0$) au moment où la roche est née (a été formée). A partir de cette définition, nous pouvons en déduire que le moment présent correspond au temps $t = t_a$ égal à l'âge de la roche.

4.6 Trouver une solution

Mais comment trouver la solution de chacune de ces équations ? Il faut avant tout comprendre ce qu'est la solution d'une équation différentielle. Puisque l'équation décrit la variation d'une fonction (grandeur), la solution est donc une fonction. Dans notre cas, la solution est une fonction qui décrit la valeur de la concentration en tout instant t , depuis un moment initial 0 jusqu'au moment présent t_a .

Ensuite, il faut revenir à la définition des fonctions élémentaires que l'on vous a décrites depuis de nombreuses années (l'exponentielle, le sinus, le cosinus, etc.) En fait, chacune de ces fonctions peut être définie (et c'est souvent ainsi qu'elle a été "inventée") à partir d'une équation différentielle, c'est-à-dire qu'elle est définie comme LA solution d'une équation différentielle. Nous pouvons ainsi déjà deviner que la solution de nos équations est la fonction exponentielle car c'est la seule fonction qui est égale à sa dérivée (à une constante multiplicative près) :

$$\frac{\partial e^{ax}}{\partial x} = ae^{ax} \quad (4.6.1)$$

On peut en fait considérer que cette relation entre la fonction et sa dérivée est la relation définissant la fonction exponentielle (et non pas son développement en série que vous connaissez sans doute).

Le cosinus et le sinus peuvent se définir comme les seules fonctions qui sont égales à la valeur négative de leur dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \sin ax}{\partial x^2} = -a^2 \sin ax \quad (4.6.2)$$

Il existe ainsi un grand nombre de fonctions (fonctions de Bessel, fonction hypergéométrique, fonctions de Legendre, etc.) qui ont été définies à partir d'une équation différentielle. Souvent cette équation a été "inventée" car elle correspond à un processus physique important (la conduction de la chaleur, la propagation d'une onde, etc.). Ceci nous démontre, de nouveau, le lien étroit qui existe entre la physique et les mathématiques et nous explique pourquoi la majorité des physiciens "célèbres" sont aussi des célébrités en mathématique.

Mais revenons à la solution de nos équations. Comme nous l'avons dit plus haut, la seule fonction qui soit égale à sa dérivée étant la fonction exponentielle, nous pouvons écrire que la solution de l'équation 4.4.2 est donnée par :

$$C_K = e^{-at} \quad (4.6.3)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de prendre cette solution et de l'introduire dans l'équation différentielle 4.4.2 et de vérifier qu'elle satisfait bien l'équation. Ainsi, dans le cas qui nous intéresse, nous obtenons :

$$\frac{\partial C_K}{\partial t} = -\alpha e^{-\alpha t} = -\alpha C_K \quad (4.6.4)$$

et nous voyons que c'est bien le cas : cette fonction satisfait l'équation.

On peut également voir que cette solution n'est définie qu'à une constante multiplicative près. Ainsi la fonction :

$$C_K = C_0 e^{-\alpha t} \quad (4.6.5)$$

est également solution de l'équation 4.4.2.

On peut montrer que puisque l'équation différentielle ne décrit que l'évolution du système, elle ne peut nous donner, à elle seule, la solution du problème qui nous intéresse. Pour y arriver, nous devons tenir compte de la valeur initiale de la solution. Ainsi, dans le cas de la concentration en K, nous avons décidé que $C_K(t = 0) = C_K^f$. Il est très simple alors de démontrer qu'il n'existe qu'une valeur de la constante multiplicative dans 4.6.5 pour laquelle cette relation sera également satisfaite et cette valeur nous donne la solution unique de notre équation différentielle qui satisfait également la condition initiale :

$$C_K = C_K^f e^{-\alpha t} \quad (4.6.6)$$

A quoi va nous servir la solution de telles équations ? Puisque cette solution nous donne la valeur de la concentration en K à tout instant de puis l'origine des temps $t = 0$ choisie comme correspondant au moment de formation de la roche, nous pouvons en déduire la valeur de la concentration en K, C_K^a à l'instant présent ($t = t_a$) ; nous obtenons :

$$C_K^a = C_K^f e^{-\alpha t_a} \quad (4.6.7)$$

Nous pouvons en déduire l'âge de la roche en se souvenant que :

$$\ln(e^x) = x \quad (4.6.8)$$

et donc :

$$\ln\left(\frac{C_K^a}{C_K^f}\right) = -\alpha t_a \quad (4.6.9)$$

ce qui mène à la "formule" suivante pour l'âge d'une roche :

$$t_a = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{C_K^a}{C_K^f}\right) \quad (4.6.10)$$

Nous pouvons bien entendu mesurer C_K^a , la concentration en K aujourd'hui (par spectrométrie de masse, par exemple), mais nous ne connaissons pas la concentration initiale, quand la roche a été créée. Cependant, nous savons que la somme des concentrations $C_K + C_{Ar}$ est restée constantes et nous pouvons écrire :

$$C_K^f = C_K^a + C_{Ar}^a \quad (4.6.11)$$

puisque la concentration initiale en Ar étaient nulle. Nous obtenons finalement la formule nous donnant l'âge d'une roche à partir des concentrations mesurées aujourd'hui en K et en Ar :

$$t_a = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{C_K^a}{C_K^a + C_{Ar}^a}\right) \quad (4.6.12)$$

Cette relation est à la base de la majorité des méthodes de datation isotopique, pas uniquement celle basée sur la désintégration radioactive du K en Ar. La valeur du paramètre α est déterminée expérimentalement.

4.7 La diffusion

Un grand nombre de processus physiques utiles en géologie peuvent être décrits par l'équation de diffusion. Par exemple, la conduction de la chaleur, l'écoulement du sol à la surface d'un relief granitique, la percolation d'un fluide dans un milieu poreux, sont des processus intensément étudiés en géologie, en pédologie et en hydrologie et qu'il nous faut impérativement décrire de façon quantitative.

Nous allons étudier un exemple simple, celui de la reptation (creep) du sol. De nombreux problèmes d'actualité réclament une connaissance et donc une description précise de ce processus, comme l'érosion des sols dans les régions semi-aride (Australie) associée à l'agriculture intensive. Nous pouvons mesurer l'épaisseur du sol, mais comment pouvons-nous utiliser ces mesures pour prédire si l'activité humaine, qui favorise le transport de sol en le déstabilisant par déforestation, va mener à sa disparition et si c'est le cas, sur quelle échelle de temps ? C'est le but de notre démarche : en dérivant l'équation gouvernant l'évolution de l'épaisseur du sol à la surface d'un relief, nous pourrions prédire l'évolution du sol en tous points d'un relief en fonction du temps. Comme nous le verrons plus loin, nos mesures ponctuelles nous permettront de valider l'équation et de déterminer la valeur des constantes de transport.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que l'évolution d'un relief en réponse au transport de sol à sa surface est régi par l'équation de diffusion. Nous allons montrer que, dans tous les domaines où elle s'applique, la forme de cette équation résulte de la combinaison d'un principe de conservation (de masse, d'énergie, de mouvement) et d'une loi de transport (de masse, d'énergie ou de mouvement).

4.8 Loi de transport

Considérons une colline de quelques centaines de mètres de long. Nous allons la représenter par une fonction $h(x)$ qui mesure la hauteur de la colline en tout point x le long d'un profil. Nous avons choisi ce profil pour qu'il suive la direction de pente maximale le long de la colline. x est la distance horizontale mesurée à partir de la base de la colline. Localement nous pouvons en mesurer la pente, S , que nous savons être également la dérivée de la fonction hauteur par rapport à la distance horizontale :

$$S = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.8.1)$$

Notons que parce que le géologue considère une pente comme étant positive lorsque la surface descend, nous devons introduire un signe négatif pour rester en accord avec la définition mathématique de la dérivée qui est positive lorsque la fonction augmente et donc lorsque la surface monte.

En tout point x , nous allons considérer que la surface de la colline est recouverte d'une mince couche de sol d'épaisseur variable. Nous la représenterons cette épaisseur par une autre fonction que nous allons appeler $e(x)$. Depuis très longtemps, le géologue a observé que le sol s'écoule le long de la surface des collines ; les observations les plus pertinentes comprennent la forme des arbres qui y poussent, l'accumulation de sol le long de troncs d'arbres abattus et couchés sur la colline ou encore l'inclinaison des piquets d'une clôture. Toutes ces observations nous indiquent que ce mouvement et donc le transport du sol ont lieu sur des échelles de temps "humaines" : la durée de la vie d'un arbre, le temps de résidence d'un tronc au sol avant qu'il ne se transforme en humus (sol) par l'activité biologique, etc. et qu'il s'agit donc d'un processus que nous devons considérer dans notre compréhension des modifications que l'activité humaine peut amener à notre environnement.

En première approximation, les quelques mesures directes de transport de sol que nous avons pu réaliser suggère que celui-ci s'effectue non seulement dans le sens de la pente locale maximale (la direction x) mais que le flux de sol (volume de sol par unité de temps) est directement proportionnel à la pente S . Nous pouvons donc écrire que le flux dans la direction x , q_x , est linéairement proportionnel à la pente :

$$q_x = KS = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.8.2)$$

en introduisant une constante, K , que nous appellerons constante de transport. Nous avons ainsi défini une nouvelle fonction q_x qui varie comme la pente.

4.9 Principe de conservation

Nous nous positionnons maintenant en un point x quelconque de la colline, le long du profil, et nous y mesurons la valeur du flux en ce point. Supposons que le flux varie et dans un premier temps qu'il est plus important en aval du point x qu'en amont. Cela signifie que la fonction flux a augmenté au point x . Nous pouvons donc dire qu'il y a eu changement (ou variation) du flux en x et, par conséquent, la dérivée de la fonction flux n'est pas nul ; elle est positive. Alternativement si le flux en amont est plus important que le flux en aval de x , la fonction flux a diminué et sa dérivée n'est pas nul et est négative.

Mais physiquement, si le flux a changé, cela signifie que il est sorti du point x plus ou moins de sol qu'il n'en est entré. Donc, par le principe de conservation de la masse, la quantité de sol en x a changé ; si le flux a diminué, l'épaisseur de sol en x a dû augmenter ; par contre si le flux a augmenté, l'épaisseur de sol en x a diminué. Cette "vérité" peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (4.9.1)$$

Toute variation spatiale du flux doit s'accompagner d'une variation temporelle de l'épaisseur de sol.

4.10 L'équation de la diffusion

En combinant les deux équations obtenues ci-dessus, l'une exprimant une loi de transport (4.8.2) et l'autre exprimant un principe de conservation (4.9.1), nous obtenons l'expression suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial(-K\frac{\partial h}{\partial x})}{\partial x} \quad (4.10.1)$$

ou encore, en supposant que K est une constante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.10.2)$$

où $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ est la dérivée seconde de la fonction h (la hauteur de la colline) par rapport à la distance x .

Nous pouvons encore simplifier cette équation en considérant que sur cette colline dont la forme est entièrement contrôlée par le transport du sol, toute variation d'épaisseur de sol mènera à une variation de la hauteur de la colline, et donc :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.10.3)$$

Ceci nous mène à la forme la plus simple de l'équation de diffusion qui régit la hauteur d'un relief sur lequel s'écoule le sol :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.10.4)$$

En analysant cette équation, on peut en déduire le comportement de base des systèmes obéissant à la loi de diffusion : la hauteur de la colline va changer là où la courbure n'est pas nulle. Là où la courbure est positive (un trou) la hauteur va augmenter (il y aura déposition et le trou va se remplir) ; là où la courbure est négative (un sommet) la hauteur va diminuer (il y aura érosion et la colline va disparaître). Donc le système va naturellement évoluer pour remplir les trous et éroder les sommets, donc vers un aplanissement de la topographie. L'état d'équilibre ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$) sera atteint quand toute courbure de la surface aura été effacée. A noter que la solution à l'équilibre peut toutefois être caractérisée par une pente finie, mais uniquement si la hauteur de la colline à l'une des extrémités du profil est non nulle où si y est imposé un flux de sol. Sinon, dans le cas où la hauteur du paysage est fixe et nulle aux extrémités (niveaux de base imposés), la solution à l'équilibre est la solution nulle : $h(x) = 0$. A noter également que durant la phase transitoire, la vitesse à laquelle la hauteur va changer est proportionnelle à la courbure et à la diffusivité, K . Ceci implique que l'évolution temporelle typique de ce genre de système est une relaxation exponentielle.

4.11 Le terme de production

Le sol que l'on retrouve à la surface d'une colline est produit par la transformation physico-chimique du socle granitique (en Bretagne) ou basaltique (à Hawaii). Cette transformation se traduit d'abord par une altération chimique en place, transformant la roche "saine" en sapprolite ; puis cette sapprolite est mobilisée, sous l'action de processus divers, tels que la bioturbation, les processus gravitaires ou les processus liés à l'écoulement de l'eau. C'est cette dernière transformation de sapprolite en sol mobile

que nous allons qualifier ici de “production” de sol et que nous noterons P . Il existe plusieurs théories sur la relation entre production et épaisseur de sol, la décroissance de cette production en fonction de l'épaisseur de sol étant la plus communément acceptée - car elle représente le caractère imperméable du sol protégeant le socle sous-jacent de l'altération chimique - mais nous allons supposer ici (par soucis de simplicité) que cette production est constante et uniforme.

Dans ce cas, il nous faut considérer que la hauteur du sol peut également augmenter en réponse à cette production locale et l'équation de diffusion-production de sol devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \kappa P \\ \frac{\partial d}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \end{cases} \quad (4.11.1)$$

où κ est un rapport de densité entre le socle et le sol, tenant compte de l'effet non négligeable de la dilatation du sol lors de sa formation.

En combinant ces équations, on obtient de nouveau, en première approximation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \kappa P \quad (4.11.2)$$

qui est l'équation de diffusion-production.

4.12 Adimensionnement

Les géomorphologues ont classifiés les systèmes pédologiques en deux grandes familles : ceux qui sont limités par le transport (où toute la colline est uniformément recouverte de sol) et ceux limités par la production (où le socle apparaît dans des parties du paysages caractérisés par une courbure négative et où de très fortes accumulations de sol sont observées là où la courbure est positive). Au vu de l'équation 4.11.2, il est clair que cela correspond à des situations où le terme de production domine le terme de diffusion ou vice-versa. Mais comment déterminer à partir de l'équation les conditions à laquelle cette transition devrait être observée ? Cela dépend-il uniquement de la valeur de la diffusivité K et de la production P ? Rappelons que ces grandeurs ont des unités assez différentes K s'exprime en m^2/Myr et P en m/Myr . On en peut pas simplement les diviser l'une par rapport à l'autre.

Pour répondre à cette question : quel est le terme qui domine dans l'équation différentielle de base, il faut avoir recours à l'adimensionnement de l'équation. Pour cela on va utiliser les conditions aux limites et la condition initiale pour simplifier l'équation et la rendre adimensionnelle. Pour illustrer ce point, nous allons supposer que les conditions aux limites sont simples :

$$\begin{cases} h(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad h(x=L) = 0 \quad \text{en tout temps, } t \\ h(t=0) = h_0 \quad \text{en tout endroit, } x \end{cases} \quad (4.12.1)$$

où L est la dimension horizontale de la colline et h_0 sa hauteur initiale.

Adimensionner une équation revient d'abord à trouver les grandeurs typiques qui vont nous permettre d'adimensionner les variables (x et t) et les inconnues (h) de l'équation. Ces grandeurs ou “échelles” se trouvent en général dans les conditions aux limites ou dans la condition initiale et devraient représenter chacune la valeur maximale ou typique de la variable ou de l'inconnue. Dans notre

cas, nous allons utiliser L pour dimensionner la variable x et h_0 pour dimensionner l'inconnue h . Nous n'avons pas de choix simple pour le temps, t , nous allons utiliser un temps caractéristique et l'appeler τ , et voir si nous pouvons le contraindre plus tard.

Pour continuer notre adimensionnement, nous allons introduire les variables et inconnues sans dimensions suivantes :

$$x' = x/L, \quad h' = h/h_0 \quad \text{et} \quad t' = t/\tau \quad (4.12.2)$$

Nous allons ensuite les introduire dans l'équation différentielle 4.11.2 en nous rappelant, par la règle de dérivation des fonctions composées, que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (4.12.3)$$

ce qui nous donne :

$$\frac{h_0}{\tau} \frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{h_0 K}{L^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + \kappa P \quad (4.12.4)$$

En divisant les deux membres de l'équation par $\frac{h_0 K}{L^2}$, on obtient :

$$\frac{L^2}{K\tau} \frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + \frac{L^2 \kappa P}{h_0 K} \quad (4.12.5)$$

On peut simplifier cette équation en prenant arbitrairement la valeur suivante pour τ :

$$\tau = \frac{L^2}{K} \quad (4.12.6)$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + \frac{L^2 \kappa P}{h_0 K} \quad (4.12.7)$$

On note alors que le membre de gauche et le premier terme du membre de droite n'ont plus de dimension ; il doit donc en être de même pour le second terme du membre de droite. Vérifions cela :

$$\dim\left(\frac{L^2 \kappa P}{h_0 K}\right) = \frac{[L^2][-][L/T]}{[L][L^2/T]} = [-] \quad (4.12.8)$$

Pour encore simplifier l'équation, on remplace alors ce terme par un nombre sans dimension, que nous appellerons ici S_d pour nous rappeler qu'il n'a pas de dimension. Notre équation devient alors :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + S_d \quad \text{avec} \quad S_d = \frac{L^2 \kappa P}{h_0 K} \quad (4.12.9)$$

On termine en adimensionnant les conditions aux limites et la condition initiale :

$$\begin{cases} h'(x' = 0) = 0 & \text{et} & h'(x' = L') = 0 \\ & & h'(t' = 0) = 1 \end{cases} \quad (4.12.10)$$

Cette forme adimensionnée de l'équation est beaucoup plus simple mais elle correspond exactement à la même physique que l'équation de laquelle nous sommes partis. Cette forme adimensionnée a cependant deux avantages supplémentaires que nous allons étudier maintenant.

Puisque l'adimensionnement des différents termes de l'équation a été fait à partir de valeurs typiques ou maximales des variables et inconnues, nous pouvons en déduire que le terme diffusif, $\frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2}$,

est de l'ordre de 1. Donc pour répondre à la question de savoir si le système étudié est limité par le transport (diffusion) ou la production, il suffit maintenant de savoir si le terme de production dans la forme adimensionnée de l'équation S_d est plus grand ou plus petit que l'unité. Ainsi la classification des systèmes pédologiques en "transport-limited" et "production-limited" (nomenclature anglophone) peut se résoudre à calculer la valeur de ce nombre sans dimension :

$$S_d = \frac{L^2 \kappa P}{h_0 K} \quad (4.12.11)$$

Si $S_d < 1$ le système est dominé par le transport (et il est production-limited); si $S_d > 1$ le système est dominé par la production (et il est transport-limited).

Le deuxième avantage de l'adimensionnement de l'équation est qu'il nous a mené à introduire un temps caractéristique :

$$\tau = \frac{L^2}{K} \quad (4.12.12)$$

Ce temps est le temps que va prendre le système (si il est dominé par la diffusion, c'est-à-dire le transport) pour évoluer vers son état d'équilibre. On se souvient que les systèmes diffusifs évoluent selon une loi de type exponentielle. Le temps τ est le temps que va mettre le système pour évoluer d'un facteur e vers son état d'équilibre. Ici c'est le temps que la colline va mettre pour que sa hauteur h soit réduite d'un facteur e .

On remarquera que ce temps caractéristique est inversement proportionnel à la diffusivité K et proportionnel au CARRE de la longueur du système. C'est une propriété de tous les systèmes diffusifs : leur temps de réponse est proportionnel au carré de leur taille.

Ces deux points démontrent que l'on peut déjà avancer dans la compréhension d'un système géologique en "décortiquant" l'équation différentielle décrivant le ou les processus physiques du système, sans avoir à la résoudre.

4.13 Autres applications

Pour terminer cette partie du cours sur l'équation de diffusion, il est bon de rappeler que cette équation (4.11.2) s'applique à de nombreux systèmes ou problèmes géologiques. Par exemple, le transport et la production de chaleur dans la croûte terrestre :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho H \quad (4.13.1)$$

où c est la chaleur spécifique des roches, ρ leur densité, k leur conductivité thermique et H le taux de production de chaleur par désintégration radioactive de l'U, du Th et du K. Cette équation est souvent augmentée d'un terme de transport de chaleur par advection (due au mouvement des roches par rapport à la surface par érosion par exemple) :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho H \quad (4.13.2)$$

où w est la vitesse d'érosion. Dans des situations plus complexes où l'on doit considérer tous les processus en trois dimensions, cette équation devient :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho H \quad (4.13.3)$$

L'équation de diffusion s'applique également aux problèmes d'hydro-géologie et d'écoulement de fluides dans des systèmes poreux :

$$S \frac{\partial \phi}{\partial t} = k_h \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (4.13.4)$$

où ϕ est la hauteur piézométrique, S est le storage et k_h la conductivité hydraulique.

L'équation de diffusion représente également les processus de dispersion d'un polluant, de turbulence dans l'océan, ou de déformation et de glissement des glaciers et calottes glaciaires.

4.14 Solution numérique

Le géologue peut quelques fois être encore plus fainéant que le mathématicien et vouloir obtenir la solution de l'équation de diffusion sans avoir à se lancer dans un développement mathématique pour en trouver la solution dite "analytique". Il passe alors par la forme discrète de l'équation en utilisant l'approximation de différence finie (équation 3.11.4) de la dérivée pour transformer l'équation différentielle en équation algébrique qu'il pourra alors introduire dans un ordinateur ou une calculatrice.

Cette démarche est très simple comme nous allons le montrer rapidement ci-après mais, dans la pratique, elle peut demander un peu plus de travail car des complications peuvent rapidement apparaître surtout si l'on veut résoudre cette équation dans des situations caractérisées par une géométrie complexe. Dans ce cas, on envisagera d'autres approximations telles que celle des éléments finis ou des volumes finis.

L'idée principale de toute méthode numérique de résolution d'une équation différentielle est de se limiter à trouver la solution en un nombre fini de points. Supposons que notre problème est mono-dimensionnel et est régi par l'équation de diffusion suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ h(x=0, t) = 0 \quad \text{et} \quad h(x=L, t) = h_L \\ h(x, t=0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.14.1)$$

Dans ce cas, nous allons chercher la solution de l'équation en une série de N points que nous allons supposer équidistants entre 0 et L et donc séparés par une distance $\Delta x = L/(N-1)$. Nous les appellerons les points de position x_i et de hauteur h_i^t , à l'instant t . Nous considérerons également que connaissant la solution (les h_i^t) à un instant t , nous allons essayer d'estimer la solution un instant d'après, c'est-à-dire à l'instant $t + \Delta t$.

En utilisant l'approximation de différence finie, nous obtenons pour le terme temporel de l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_i^{t+\Delta t} - h_i^t}{\Delta t} \quad (4.14.2)$$

et pour le terme spatial, après avoir appliqué deux fois l'approximation de la dérivée par différence finie :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{i+1}^t - 2h_i^t + h_{i-1}^t}{\Delta x^2} \quad (4.14.3)$$

Combinant ces deux termes, nous obtenons une forme approximative, mais très pratique de l'équation de départ :

$$\frac{h_i^{t+\Delta t} - h_i^t}{\Delta t} \approx \frac{h_{i+1}^t - 2h_i^t + h_{i-1}^t}{\Delta x^2} \quad (4.14.4)$$

que nous pouvons aisément transformer en une équation d'évolution algébrique pour la hauteur h_i :

$$h_i^{t+\Delta t} \approx h_i^t + \Delta t \frac{h_{i+1}^t - 2h_i^t + h_{i-1}^t}{\Delta x^2} \quad (4.14.5)$$

où la solution en $t + \Delta t$ peut être calculée à partir de la solution en t .

4.15 Points importants à retenir

1. Comprendre le sens et l'utilité d'une équation différentielle
2. Comprendre l'équation de croissance/décroissance radioactive
3. Comprendre l'utilité (et la nécessité) de la condition initiale
4. Savoir résoudre une équation simple de décroissance radioactive et en déduire la relation donnant l'âge d'une roche à partir des concentrations actuelles des éléments parent et fils.
5. Comprendre comment on dérive l'équation de diffusion à partir d'un principe de conservation et d'une loi de transport
6. Comprendre comment on y intègre le terme de production
7. Savoir adimensionner une équation différentielle et comprendre à quoi cela sert
8. Connaître d'autres applications de l'équation de diffusion en sciences de la Terre
9. Savoir résoudre une équation différentielle simple par la méthode des différences finies

4.16 Travaux dirigés

Exercice 25

Dérivez l'équation de la croissance d'une population de poissons en tenant compte d'un effet limitant de la pêche que l'on supposera dans un premier temps se réaliser à une vitesse constante.

Exercice 26

Dérivez l'équation de la croissance d'une population de poissons en tenant compte d'un effet limitant de la pêche que l'on supposera dans un second temps se réaliser à une proportion constante de la population.

Exercice 27

Dans les deux cas décrits dans les deux questions/exercices précédents, dérivez l'expression de la fonction population en fonction du temps (solution de l'équation différentielle) en supposant que la population au temps 0 est P_0 . Déduisez-en une ou plusieurs stratégies de pêche pour conserver la population à une valeur constante.

Exercice 28

Dérivez l'équation de conservation et transport de chaleur par conduction à l'équilibre en tenant compte d'un terme de production constante.

Exercice 29

A partir de cette équation, dérivez la forme du gradient géothermique dans la croûte terrestre continentale en prenant une valeur de 3 W/m/K pour la conductivité des roches et de $1 \mu\text{W/m}^3$ pour la production de chaleur par unité de volume. Nous supposons que la surface de la Terre est à 0°C et que la base de la croûte (à 40 km de profondeur) est à une température de 700°C .

Exercice 30

Répétez l'exercice précédent mais pour en déduire la forme du géotherme jusqu'à la base de la lithosphère que nous supposons être à une température de 1350°C et qui reçoit un flux de chaleur du manteau convectif sous-jacent de 25 mW/m^2 . Déduisez-en l'épaisseur moyenne de la lithosphère ainsi que la température à la base de la croûte.

Exercice 31

Adimensionnez l'équation de conservation et transport de chaleur par conduction à l'équilibre en tenant compte d'un terme de production constante. Extrayez-en un nombre sans dimension. Utilisez le pour déterminer si nous devons tenir compte de la courbure du géotherme pour des problèmes limités aux 1000 premiers mètres de la croûte.

Exercice 32

L'équation de conservation et transport de chaleur par conduction en tenant compte d'un terme d'advection a la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.16.1)$$

On supposera que la température est fixe à une profondeur L . Adimensionnez cette équation pour en tirer un nombre sans dimension représentant l'importance du terme d'avection (appelez-le le nombre de Péclet, \mathbf{Pe}) et un temps caractéristique de conduction (appelez-le τ_c). En déduire la forme du géotherme dans une croûte continentale à l'état d'équilibre thermique, et soumise à une exhumation tectonique $v = 5 \text{ km/Myr}$. En supposant que la diffusivité thermique des roches (κ) est constante et vaut $25 \text{ km}^2/\text{Myr}$, en déduire la valeur du nombre \mathbf{Pe} dans des systèmes d'épaisseur faible ($L = 2 \text{ km}$) comme une nappe, ou d'épaisseur crustale ($L = 35 \text{ km}$). Dans quels cas l'avection de chaleur joue-t-elle un rôle important.

Exercice 33

Transformer l'équation de la chaleur à une dimension suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + P \\ T(z = 0, t) = 0 \\ T(z = L, t) = T_L \\ T(z, t = 0) = \frac{T_L}{L}z \end{array} \right. \quad (4.16.2)$$

en une équation algébrique entre les températures $T_i, i = 1, \dots, N$ aux profondeurs $z_i = L \frac{i-1}{N-1}$ en utilisant l'approximation des différences finies, pour une valeur quelconque de N .

Exercice 34

Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour prédire l'évolution de la température en $N = 4$ points pour les valeurs suivantes des paramètres : $\kappa = 25 \text{ km}^2/\text{Myr}$, $P = 200 \text{ }^\circ\text{C/Myr}$, $L = 30 \text{ km}$, $T_L = 750 \text{ }^\circ\text{C}$. Estimer le temps caractéristique de conduction et déduisez en un pas de temps Δt adéquat pour avancer votre solution dans le temps par une méthode explicite.

Géométrie - Trigonométrie

5.1 Objectifs

- Comprendre les relations de base entre longueurs et angles dans un triangle rectangle
- Utiliser ces relations à bon escient
- Comprendre et utiliser les relations de base de la trigonométrie
- Comprendre et utiliser les relations de base de la trigonométrie sphérique
- Comprendre des notions de base de projection cartographique
- Décrire un point, une droite, un plan dans l'espace par des expressions mathématiques
- Décrire une sphère, une ellipse, une parabole et une hyperbole
- Utiliser ces expressions pour décrire les relations entre ces différents objets géométriques

5.2 Introduction

Le géologue a besoin de très bonnes notions de base en géométrie et en trigonométrie car une de ses qualités va être de se repérer dans l'espace et de décrire ses observations. La géologie structurale mais également la cartographie, la mécanique des roches et bien d'autres domaines des sciences de la Terre vont faire appel à des notions de géométries. C'est pour cela que nous les introduisons dans ce cours. Elles sont essentielles au bon fonctionnement de tous les types de géologues.

Pour faire de la géométrie et de la trigonométrie, nous allons devoir manipuler deux types de grandeurs, principalement : des longueurs et des angles. Les longueurs s'expriment en mètres, bien que le géologue aime utiliser le kilomètre qui est souvent mieux adapté à la taille des objets qu'il étudie. Les angles se mesurent en degrés, comme indiqué sur les boussoles, mais le mathématicien aime utiliser le radian et exprimer les angles en multiples de la constante π . Rappelons que cette constante est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas s'exprimer comme sous la forme d'un rapport de deux nombres entiers. Sa valeur est déterminée par le rapport entre le rayon et la circonférence du cercle. Pour mieux le comprendre, il faut considérer un cercle de rayon unitaire (en m ou km ou tout autre unité de mesure des longueurs) ; la circonférence de ce cercle vaut exactement 2π dans les mêmes unités. L'angle soutenu en son centre par un cercle complet (360°) est donc de 2π , lorsqu'il est exprimé en radians. Un angle plat vaut π et un angle droit vaut $\pi/2$.

5.3 Sinus et cosinus

Nous avons introduit dans le chapitre traitant de l'analyse fonctionnelle plusieurs fonctions dites "périodiques" telles que le sinus, le cosinus et la tangente d'une variable x . Elles ont été introduites à l'aide de leur développement en série (équations 3.6.3) et des propriétés de leurs dérivées (équations 3.6.9). Nous avons même vu comment ces deux définitions étaient équivalentes grâce au développement en série de Taylor (équation 3.9.4).

Il existe une autre façon d'introduire et de définir le sinus et le cosinus, à partir de leur application à la trigonométrie et donc aux angles. Cette façon est sans doute plus "classique" pour ne pas dire "historique", mais elle va nous être très utile. Considérons un cercle de rayon unitaire, comme illustré dans la figure 5.1. A tout point P situé le long du cercle, on peut associer un angle : celui formé par le rayon reliant le centre du cercle au point P et l'axe des x , comme représenté sur la figure 5.1. Appelons cet angle a . L'abscisse du point P (c'est-à-dire la projection du point P sur l'axe des x) est égale au cosinus de l'angle a , tandis que son ordonnée (projection du point P sur l'axe des y) est égale au sinus de l'angle a .

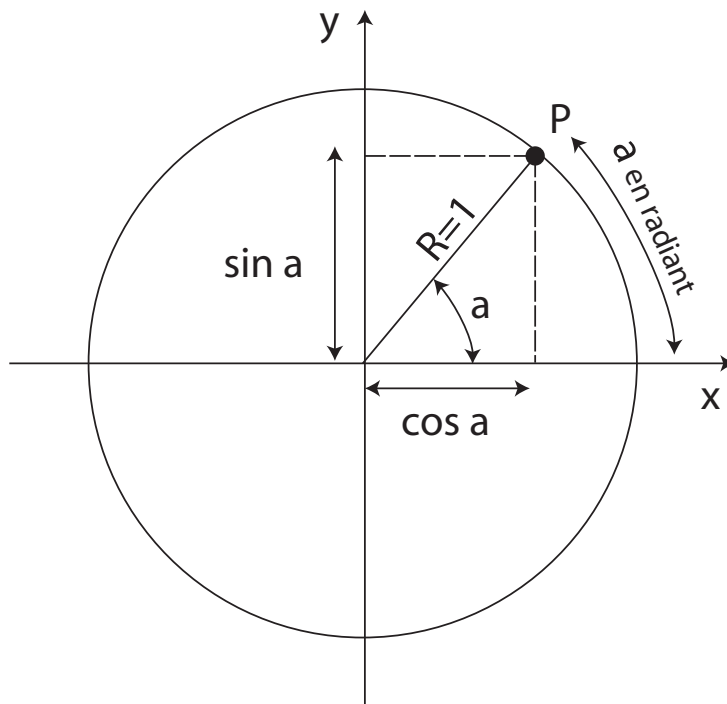


Figure 5.1 – Cercle de rayon R ; relation entre l'angle a formé par la droite reliant un point P et l'axe des x et la projection de ce point sur l'axes des x , correspondant au cosinus de l'angle a et la projection sur l'axe des y , correspondant au sinus de l'angle. A noter également que la longueur de l'arc de cercle soutenu par l'angle a est égale à l'angle a exprimé en radians.

Cette définition est très pratique car, de par son caractère géométrique, elle nous permet de retenir la valeur du sinus et cosinus de nombreux angles (0 , $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/2$, π , etc...) et, au minimum, le signe du sinus et du cosinus de tous les angles. On voit qu'il y a une correspondance entre le théorème

de Pythagore et l'une des propriétés fondamentales de la trigonométrie :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (5.3.1)$$

pour tout angle a . Le théorème de Pythagore nous dit que :

... dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des côtés adjacents à l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse ...

c'est-à-dire le troisième côté. Par "carré d'un côté", nous entendons le carré de la longueur de ce côté, évidemment...

On peut également en déduire la relation entre hypoténuse et l'un ou l'autre des côtés adjacents à l'angle droit :

... dans tout triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit est égale au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent ...

et :

... dans tout triangle rectangle, un des côtés de l'angle droit est égale au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé ...

Ce diagramme est donc une vraie mine d'or pour retenir de nombreuses règles et recettes trigonométriques. Inscrivons-le dans nos mémoires ou au dos de notre calculatrice...

Tant que nous y sommes, rappelons quelques règles s'appliquant à tous les triangles (triangles quelconques) :

1. la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180° (π) ;
2. le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des côtés opposés diminué du double du produit des côtés opposés par le cosinus de l'angle opposé.

Cette relation est l'extrapolation de la règle de Pythagore aux triangles quelconques. Exprimons cela de façon mathématique. Dans un triangle quelconque de côtés A , B et C et d'angles a , b et c (a étant opposé à A , b à B et c à C ; voir figure 5.2), nous savons que :

$$\begin{cases} a + b + c = 2\pi \\ A^2 = B^2 + C^2 - 2 BC \cos a \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Et finalement introduisons une autre grandeur, la tangente de l'angle a , qui n'est rien d'autre que le rapport du sinus sur le cosinus :

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (5.3.3)$$

ce qui nous permet de présenter une troisième relation entre angles et côtés dans un triangle rectangle :

Le rapport des deux côtés adjacents à l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à la tangente de l'angle opposé au premier côté.

ou, sous forme mathématique :

$$\frac{A}{B} = \tan a \quad (5.3.4)$$

en supposant que le triangle est rectangle en C .

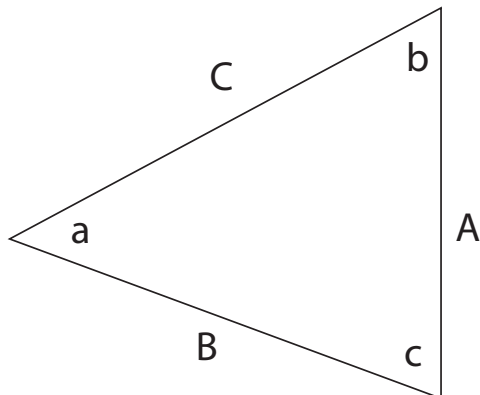


Figure 5.2 – Convention d'appellation des angle et côtés d'un triangle quelconque utilisée dans le texte.

5.4 Règles de trigonométrie

Il existe également un grand nombre de relations très utiles sur les sinus, cosinus et tangente. Nous les donnons ici (tableau 5.1) sans démonstration, car nous allons plutôt nous concentrer sur leur utilisation dans des problèmes géologiques. Il est bon cependant de rappeler que nous pouvons dériver ces relations du diagramme de la figure 5.1 ...

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$
$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Table 5.1 – Relations de trigonométrie

Il existe également d'autres relations très utiles (voir tableau 5.2) relevant du fait que les fonctions trigonométriques sont circulaires (ou périodiques) ; à noter que nous pouvons également les dériver du diagramme de la figure 5.1

5.5 Conseils d'utilisation

Quels sont les problèmes géologiques où ces notions de géométrie vont nous être utiles ? Réponse : tout problème où n'interviennent que des droites et des angles. De plus, au vu de la simplicité des relations s'appliquant aux triangles rectangles, une bonne approche est de repérer les angles droits dans le problème posé et de les utiliser pour construire des triangles rectangles imaginaires.

$\sin(\pi/2 - a) = \cos a$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin a$
$\sin(\pi - a) = \sin a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$
$\sin(2\pi + a) = \sin a$
$\cos(2\pi + a) = \cos a$

Table 5.2 – Relations de trigonométrie

Prenons un exemple simple : la figure 5.3 illustre la géométrie simplifiée d'un prisme orogénique triangulaire. Ce diagramme représente une zone de collision continentale où deux plaques lithosphériques se rencontrent et convergent l'une vers l'autre. Il se limite à l'échelle de la croûte et suppose que la partie mantellique de l'une des deux lithosphères, celle de droite, subduit sous l'autre. Si la réponse mécanique de la croûte à cette force compressive est dominée par son comportement cassant, deux failles se forment de part et d'autre d'une région triangulaire qui entre en surrection par rapport aux régions voisines non déformées. En supposant que l'érosion du relief ainsi créé est très efficace (le climat est humide), la chaîne de montagnes qui se forme reste modeste et d'élévation faible, que nous supposerons négligeable par rapport à l'épaisseur de la croûte, de sorte que la région qui se déforme reste à peu près triangulaire. Lorsque l'érosion compense parfaitement la surrection tectonique, le système atteint un équilibre dynamique dans lequel sa géométrie n'évolue plus et les roches traversent la zone orogénique de droite à gauche en suivant des chemins parallèles à celui représenté dans la figure 5.3 par une trait hachuré. Trois cas sont considérés : les deux failles ont le même pendage et il est de 45° ; les deux failles ont le même pendage, mais il est quelconque (angle a) ; les deux failles ont des pendages différents (angles a et b). En utilisant les notions vues ci-dessus, essayons de déterminer la vitesse d'exhumation (érosion) à la surface du prisme (composante verticale du vecteur appelé u dans la figure 5.3), en fonction de la vitesse de convergence entre les deux plaques (appelé v dans la figure 5.3). Ces deux vitesses sont souvent estimées de façon différentes par les géologues. Pour la vitesse d'exhumation nous utilisons la thermochronologie et pour la vitesse de convergence, nous utilisons la géométrie et la datation des anomalies magnétiques du fond des océans. Donc si nous connaissons les deux vitesses et nous pensons pouvoir les relier l'une à l'autre par une relation géométrique simple, nous devrions pouvoir en tirer des informations sur la géométrie et le pendage des failles majeurs de la zone de collision.

Pour répondre à ces questions, nous allons utiliser le principe de conservation de la masse, en supposant, qu'à l'échelle d'une chaîne de montagnes, les roches sont incompressibles, et nous pouvons statuer qu'à l'équilibre, le flux de roches entrant le prisme orogénique doit être égal au flux de roches sortant. En d'autres termes, nous savons que le produit de la composante horizontale de la vitesse de convergence, v_h par l'épaisseur de la croûte, h (=flux entrant) doit être égal au produit de la composante verticale de la vitesse d'exhumation, u_v par la largeur du prisme orogénique, w (=flux sortant) :

$$v_h h = u_v w \tag{5.5.1}$$

et donc, pour obtenir la vitesse verticale de sortie, il nous faut déterminer la largeur w dans les trois

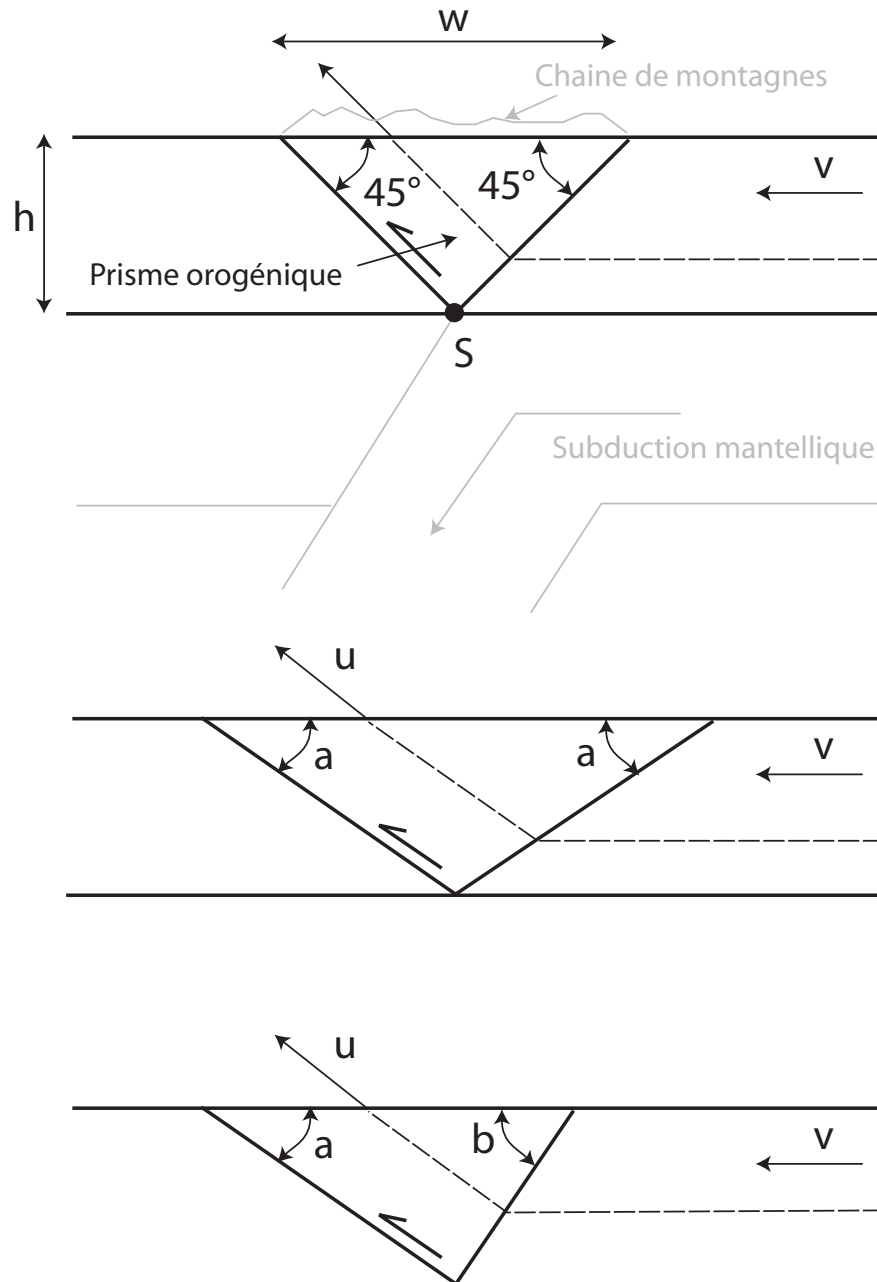


Figure 5.3 – Géométrie d'un prisme orogénique. Trois cas sont considérés en ce qui concerne le pendage des structures majeur bordant ce prisme. Voir les détails dans le texte.

cas :

$$u_v = v_h h / w \quad (5.5.2)$$

Le premier cas est assez simple car le prisme orogénique est un triangle droit au point S dont l'hypoténuse est de longueur w et on peut facilement en déduire que $w = 2h$ et donc :

$$u_v = v_h / 2 \quad (5.5.3)$$

Dans le second cas, il faut diviser le prisme en deux triangles en traçant une ligne verticale émanant du point S . On a alors deux triangles rectangles identiques, droits à la surface, quelque soit la valeur de l'angle a . Dans chacun de ces triangles, nous pouvons déterminer la longueur du côté horizontal (en surface) en fonction de l'épaisseur de la croûte, h , et en le multipliant par 2, nous obtenons :

$$w = 2h / \tan a \quad (5.5.4)$$

et donc :

$$u_v = (v_h / 2) \tan a \quad (5.5.5)$$

Dans le troisième cas, nous pouvons procéder de la même façon, mais les deux triangles rectangles formés en traçant une ligne verticale émanant de S ne sont pas identique. Le même raisonnement nous donne :

$$w = h / \tan a + h / \tan b \quad (5.5.6)$$

et donc :

$$u_v = v_h \frac{\tan a \tan b}{\tan a + \tan b} \quad (5.5.7)$$

5.6 Trigonométrie sphérique

En tant que géologue nous devons nous situer et travailler à la surface de la Terre qui n'est malheureusement pas plate. Les relations que nous avons vu ci-dessus concernent des objets (triangles) plans. Il est donc important que nous comprenions quelques bases de trigonométrie sphérique. Cette trigonométrie, où les distances sont mesurées le long de grands arcs de cercle à la surface de la sphère, n'est pas plus compliquée que la trigonométrie euclidienne, où la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite, mais elle demande avant tout de bien comprendre la définition des angles avec lesquels on va travailler. Ils sont de deux types :

1. l'angle que forme deux arcs de cercle entre eux ; ces angles sont semblables aux angles avec lesquels on travaille en géométrie plane ;
2. l'angle formé par deux points à la surface vu du centre de la sphère, dans notre cas la Terre ; ces angles sont semblables aux longueurs ou distances avec lesquelles on travaille en géométrie plane

En d'autres termes la longueur d'un arc à la surface de la sphère se mesure comme un angle en degrés ou en radians. Si l'on veut obtenir la valeur de cet arc en kilomètres, il faut multiplier sa valeur exprimée en radians par le rayon de la Terre exprimé en kilomètres. Ces deux types d'angles permettent de définir un triangle sphérique comme illustré dans la figure 5.4.

En passant, un petit rappel sur la valeur du rayon de la Terre, R_{\oplus} : le mètre a été défini comme le dix-millionième de la distance entre le pôle et l'équateur. Donc, la circonférence de la Terre fait 40

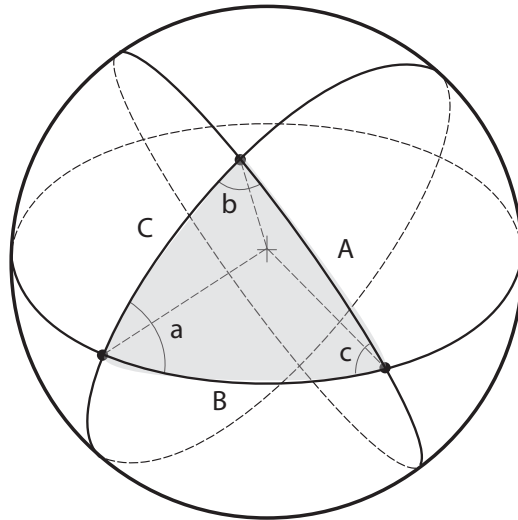


Figure 5.4 – Un triangle sphérique quelconque reliant trois points à la surface de la Terre. Les côtés de ce triangle - A , B et C - sont exprimés en termes des angles qu'ils forment vu du centre de la Terre. Les angles a , b et c sont les angles que forment les côtés du triangle sphérique entre eux à la surface de la Terre.

000 km et son rayon est donné par $40\,000 / (2\pi) \approx 6\,366$ km. Comme la Terre n'est pas une sphère, mais un ellipsoïde (une sphère aplatie le long de son axe de rotation), son rayon ne peut cependant pas être défini de manière équivoque. Le rayon équatorial est de 6 378 km et le rayon polaire est de 6 357 km. Le rayon de la sphère de même volume que l'ellipsoïde terrestre est de 6 371 km.

Un point important à noter concernant les triangles sphériques : la somme des angles internes, $a + b + c$, n'est pas égale à π , comme c'est le cas dans un triangle plat.

5.7 Formules

Quatre formules sont couramment utilisées en trigonométrie sphérique.

1. La formule des cosinus :

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \quad (5.7.1)$$

2. La relation duale :

$$\cos c = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (5.7.2)$$

3. La formule des sinus :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (5.7.3)$$

4. La formule de la distance, Δ_{XY} , entre deux points, X et Y , sur la sphère (qui se dérive de la formule des cosinus) :

$$\Delta_{XY} = R_{\oplus} \arccos(\sin \phi_X \sin \phi_Y + \cos \phi_X \cos \phi_Y \cos \Delta\lambda) \quad (5.7.4)$$

où ϕ_X et ϕ_Y sont les latitudes des points X et Y et $\Delta\lambda$ est la différence de longitude entre X et Y .

Calculons par exemple la distance entre Paris ($48^\circ 49'$ N, $2^\circ 19'$ E) et New York ($40^\circ 40'$ N, $73^\circ 49'$ W). Attention que les longitudes sont exprimées en longitude est ou ouest et que les latitudes sont exprimées en latitudes nord ou sud. Ne pas se tromper lors du passage de degrés - minutes - secondes en degrés décimaux ou en radians.

Dans notre cas, les longitudes et latitudes de Paris (points X) sont 2,31667 et 48,81667, respectivement, en degrés décimaux. Pour New York, ils sont -73,81667 et 40,66667. La distance en kilomètres entre Paris et New York, mesurée le long du grand arc de cercle les reliant (plus petite distance à la surface de la Terre) est donc :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Paris - New York}} &= \\ 6371 \times \arccos(\sin 48,81^\circ \sin 40,66^\circ + \cos 48,81^\circ \cos 40,66^\circ \cos(2,31^\circ + 73,81^\circ)) &= \\ 6371 \times \arccos(0,752 \times 0,651 + 0,658 \times 0,758 \times 0,239) &= \\ 6371 \times \arccos 0,610 = 6371 \times 52,40^\circ = 6371 \times 0,914 = 5826 \text{ km} \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

5.8 Aire

La formule de Girard (1625) nous donne de façon très élégante la valeur de l'aire d'un triangle sphérique :

$$S = (a + b + c - \pi)R^2 \quad (5.8.1)$$

5.9 Cartographie

La sphère est une surface non développable, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la découper pour l'aplatir sur un plan. Pour représenter la surface de la Terre sur une carte, on doit faire usage d'une projection, c'est-à-dire une représentation approximative de la sphère sur le plan de la carte. Sur des distances faibles par rapport au rayon de la Terre, la majorité des approximations sont très bonnes et se ressemblent. Mais lorsque nous voulons dessiner une carte ou étudier des objets à la surface de la Terre qui ont des dimensions comparables au rayon de la Terre, il nous faut utiliser une "projection cartographique". Le géologue doit bien comprendre ce qu'est une projection cartographique et en connaître les propriétés principales pour utiliser la projection appropriée à ses besoins. Il ne s'agit pas ici de donner un cours complet de projection cartographique (ce qui prendrait trop de temps) mais de vous rappeler les différentes propriétés de projections (ce qu'elles respectent) ainsi que les différents types de projections (comment elle sont construites).

Il existe trois propriétés importantes :

1. les projections "équivalentes" qui conservent les surfaces, localement ;
2. projection "conformes" qui conservent les angles, donc les formes, localement ;
3. les projections "aphylactiques" (les autres) qui peuvent conserver les distances le long des méridiens ;

Les trois types de projections sont (voir Figure 5.5) :

1. les projections "cylindriques" où on projette la sphère sur un cylindre qui l'entoure (tangent ou sécant en deux cercles) ;

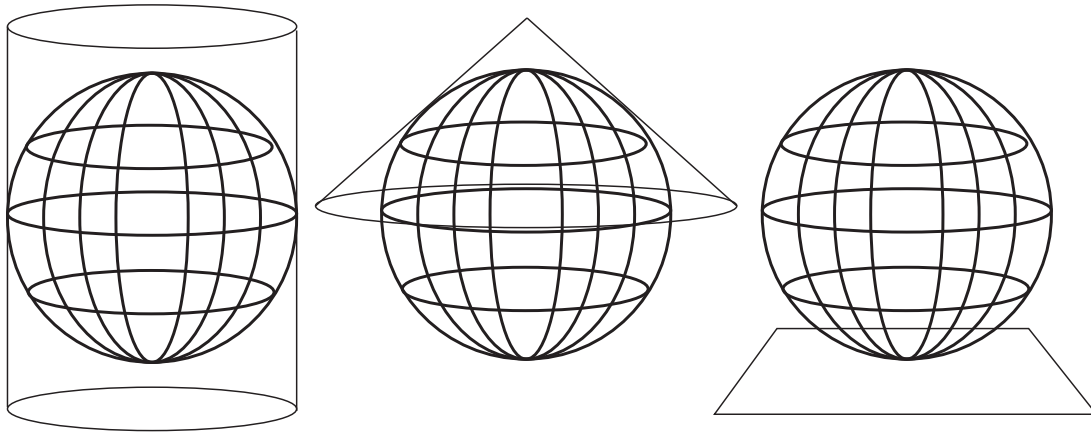


Figure 5.5 – Les trois types de projections cartographiques, cylindrique, conique et azimutale.

2. les projections “coniques” où on projette la sphère sur un cône (tangent ou sécant en deux cercles) ;
3. les projections “azimutales” où on projette la sphère sur un plan (tangent ou tangent en un cercle).

Le tableau 5.3 donnent les propriétés et types de projections couramment utilisées.

Projection	Type	Propriété
Mercator	Cylindrique	Conforme
Mercator oblique	Cylindrique	Conforme
Peters	Cylindrique	Equivalente
UTM	Cylindrique	Conforme
Cylindrique Equidistante	Cylindrique	Aphylactique équidistante
Lambert	Conique	Conforme
Albers	Conique	Aphylactique
Stéréographique	Azimutale	Aphylactique
Gnomonique	Azimutale	Aphylactique équidistante
Orthographique	Azimutale	Aphylactique équidistante

Table 5.3 – Projections couramment utilisées, leurs types et propriétés.

5.10 Diagrammes polaires

Le géologue de terrain a souvent besoin de représenter et d’enregistrer la géométrie d’objets tri-dimensionnels comme un plan de faille ou un pli mais ne dispose que d’un carnet bi-dimensionnel. De même le pétrographe va devoir consigner des orientations cristallographiques tri-dimensionnelles dans son cahier de laboratoire et les résumer dans une publication. Pour y arriver, les géologues utilisent des constructions géométriques simples qui permettent avant tout de représenter l’orientation d’un plan tri-dimensionnel sur une feuille de papier. Le problème est semblable à celui de devoir projeter

des géométries existant à la surface d'une sphère (la Terre) sur un plan (une carte).

Imaginons que nous mesurons une série de pendages apparents le long d'un plan de faille ainsi que les azimuts correspondants (direction par rapport au Nord de la ligne le long de laquelle le pendage apparent a été mesuré). Pouvons-nous en déduire si le plan de faille est bien plan ainsi que son vrai pendage (pente la plus forte) et azimut (direction de la pente la plus forte). Pour se faire, imaginons que le plan de faille est intersecté par une sphère dont le centre se trouve sur le plan de faille (Figure 5.6a). Chaque mesure que nous avons faite peut se représenter par un point sur cette sphère de telle sorte que la ligne reliant le centre de la sphère à ce point soit alignée avec la direction (pendage, azimut) mesuré. En projetant ces points sur le plan horizontal (Figure 5.6b), on peut voir que tous ces points devraient se situer sur un grand arc de cercle (qui devient un arc d'ellipse sur le plan du papier) si la surface était bien plane. De plus l'orientation de cet arc de cercle nous indique le vrai pendage et azimut du plan de faille.

Pour déterminer l'orientation du plan, il suffit de dessiner la courbe correspondant au grand arc de cercle. L'angle que fait ce diamètre avec la direction du Nord est l'azimut du plan (ici 12°). Le diamètre perpendiculaire représente la normale au plan; on peut en déduire le pendage du plan (pendage maximum ou vrai pendage, ici 41°) ainsi que la direction de pendage maximum (ici 102°). Cette construction est appelée un diagramme polaire ou stéréogramme polaire.

Différent type de stéréogrammes seront utilisés, correspondant à différentes projections, respectant les distances, les angles ou les surfaces. Si la question principale est de déterminer si un ensemble de directions mesurées sur le terrain ou dans le laboratoire définit un plan (les points sont-ils sur un grand arc de cercle représenté par une ellipse sur le plan du papier), une autre méthode, plus précise, est souvent utilisée : celle des "abaques équatoriaux". Il s'agit toujours de construire une projection de la sphère vers le plan, mais cette fois-ci le plan de projection passe par le pôle de la sphère, plutôt que par l'équateur. La projection résultante est illustrée sur la Figure 5.7.

Pour utiliser un abaque équatorial (souvent appelé abaque de Wulff si il respecte les angles, abaque de Kavraiskii si il respecte les distances et abaque de Schmidt s'il respecte les surfaces), il faut avant tout procéder à une petite construction avec du papier transparent. On découpe un cercle de papier transparent de même diamètre que l'abaque sur lequel on indique un rayon ou un diamètre qui correspondra à la direction nord. On perce les deux feuilles (l'abaque et le cercle de papier transparent) en leur centre au moyen d'une punaise ce qui permettra de faire tourner le cercle de papier transparent. On aligne alors les deux cercles (Figure 5.7a). Pour chaque mesure de pendage et d'azimut (direction du pendage), on fait tourner le papier transparent dans la direction anti-horaire d'un angle égal à l'azimut mesuré (ici 102°) et l'on inscrit un point à une distance égale au pendage (ici 26°) à partir du sommet de l'abaque (Figure 5.7b). On fait de nouveau tourner le papier transparent pour réaligner les deux pôles Nord (Figure 5.7c). Le point est correctement situé sur l'abaque. On répète cette opération pour chaque mesure (Figure 5.7d). On fait alors tourner le papier transparent jusqu'à ce que les points s'alignent sur un grand arc de cercle (ou d'ellipse) de l'abaque (Figure 5.7e). L'angle que fait cet arc de cercle mesuré depuis l'équateur (Figure 5.7e) correspond au pendage du plan (ici 47°) et la direction de ce pendage maximum est donné par la distance angulaire entre la trace du plan et l'équateur lorsque les deux abaques sont de nouveau alignées (Figure 5.7f). L'azimut de la trace du plan est perpendiculaire à cette direction et en est donc le complément.

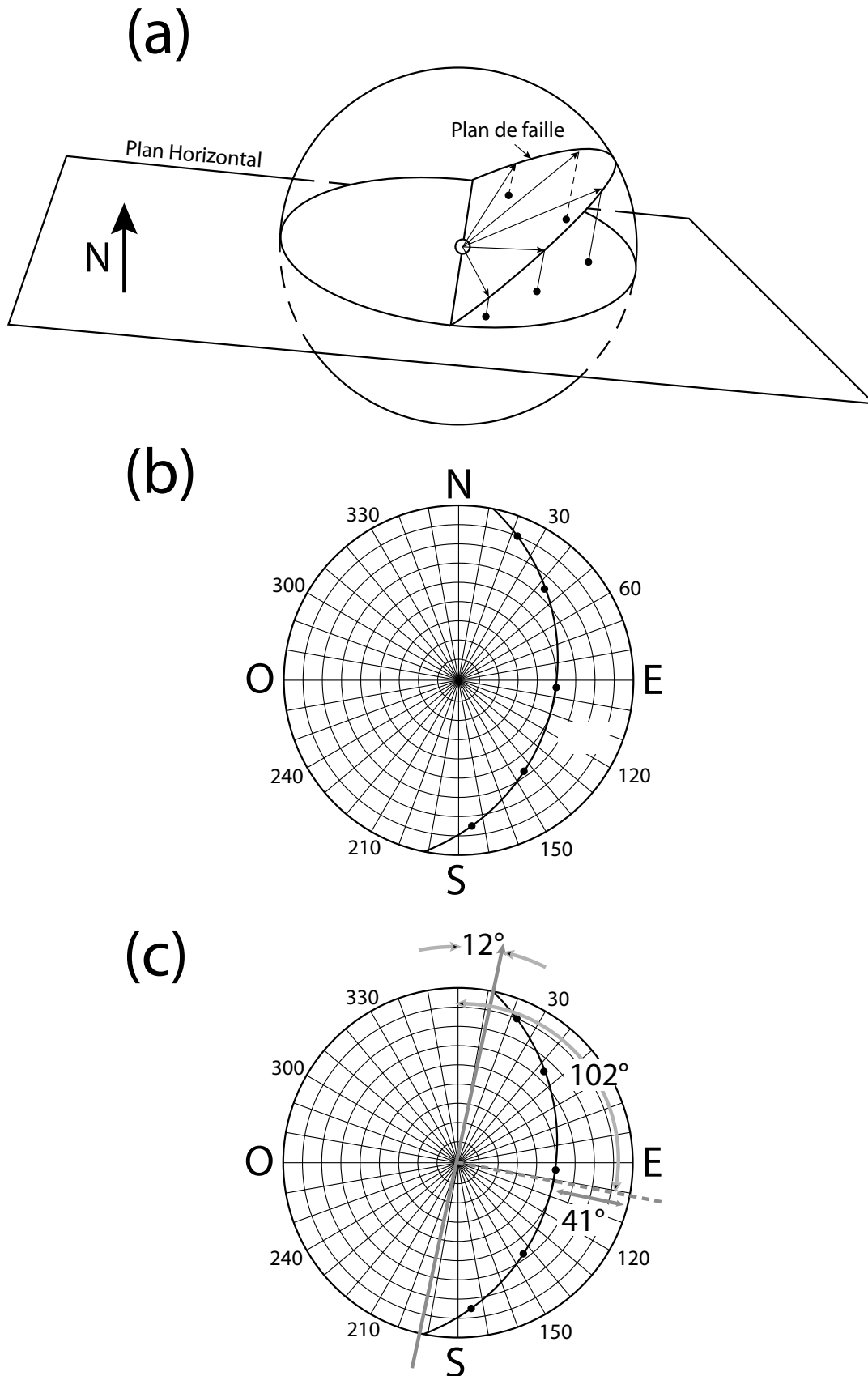


Figure 5.6 – (a) Représentation des directions mesurées sur une sphère ; (b) diagramme polaire résultant de la projection des points définissant les directions mesurées de la sphère au plan horizontal orienté ; (c) détermination de l'orientation (pendage et azimut) du plan de faille.

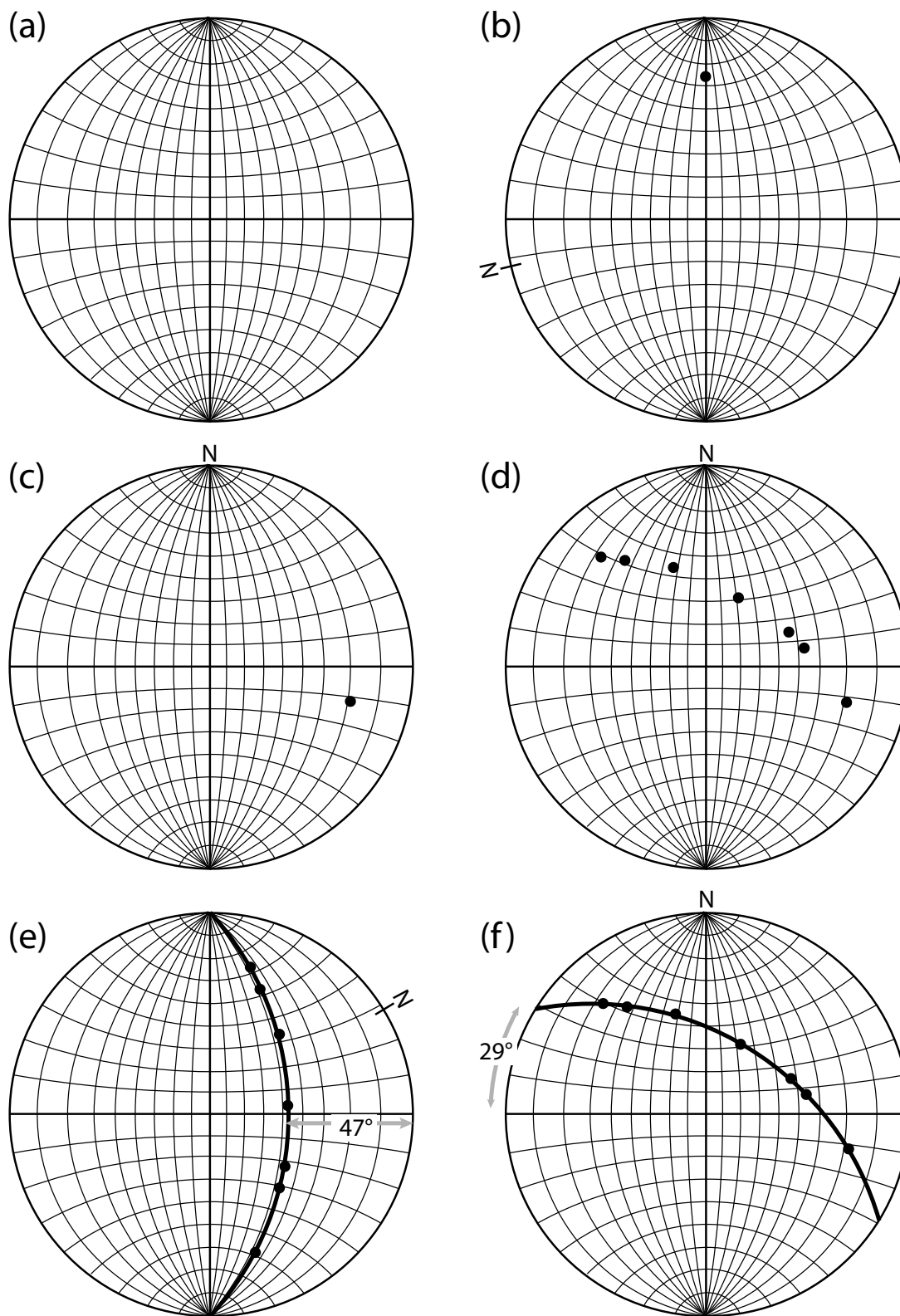


Figure 5.7 – (a)-(d) Comment représenter des mesures de directions tri-dimensionnelles sur un abaque équatorial et comment en déduire (e) le pendage et (f) la direction du pendage maximum.

5.11 Géométrie analytique

La géométrie analytique permet de représenter des objets géométriques par des équations. C'est une science très utile pour les géologues qui vont souvent devoir décrire des objets géométriques tri-dimensionnels, tels que des points (localisation dans l'espace d'un affleurement), des droites (distance entre deux points, azimut d'une direction, etc.) et des plans (plan de faille, plan stratigraphique), mais aussi des objets plus complexes (plis, anticlinaux, diapirs, etc...) La géométrie analytique nous permet de les décrire précisément, de les comparer (taille, direction, etc.) mais aussi de calculer leurs intersections (entre deux plans, entre une droite et un plan). Ce dernier point est crucial car le géologue doit souvent travailler avec des objets tri-dimensionnels dont il ne voit que l'intersection avec le plan de la surface. De plus cette surface peut ne pas être plane...

En plus de la localisation et la description d'objets géologiques dans l'espace, il existe d'autres domaines, souvent plus abstrait, où la géométrie analytique sera utile au géologue : la description d'un critère de rupture en mécanique des roches, par un cylindre (critère de Von Mises) ou un cône (critère de Drucker-Prager) ou une parabole (critère de Griffiths-Murrell), etc...

Dans cette partie du cours, nous allons faire le choix de travailler dans un espace à trois dimensions, tout en donnant, lorsque cela le nécessite, l'équivalent en deux dimensions.

5.12 Objets simples

Nous allons supposer que tout point de l'espace peut être localisé par un ensemble de trois nombres, ou coordonnées qui précisent sa position par rapport à un système de coordonnées que nous appellerons (x, y, z) et qui se définit par un centre (point de référence de coordonnées $(0, 0, 0)$) et trois directions représentées par des axes que nous allons également supposés orthogonaux (perpendiculaires) les uns aux autres. De plus chaque direction sera caractérisée par une longueur unitaire qui sera utilisée pour mesurer la distance dans chacune des trois directions. Nous supposerons ici que cette distance unitaire est la même pour chaque direction. Puisque ce système de coordonnées est défini par des directions et des longueurs, nous utiliserons également le concept de "vecteurs" unitaires dont l'origine commune se situe au point $(0, 0, 0)$.

Dans un tel système, tout point de l'espace est représenté par un triplet de coordonnées (x, y, z) . Un plan est représentée par une relation linéaire entre ces trois coordonnées :

$$ax + by + cz = d \quad (5.12.1)$$

On notera que seuls trois des scalaires a, b, c et d sont indépendants (ou nécessaires à la définition d'un plan) car il suffit de diviser cette équation par d pour obtenir trois coefficients (scalaires) $a' = a/d$, $b' = b/d$ et $c' = c/d$, définissant de façon unique le plan :

$$a'x + b'y + c'z = 1 \quad (5.12.2)$$

Une direction est représentée par un triplet de coordonnées (N_x, N_y, N_z) correspondant à un point quelconque le long de la droite partant de l'origine vers la direction représentée. De ce fait deux seulement de ces coordonnées sont indépendantes ou nécessaires. On choisira souvent les coordonnées (N_x, N_y, N_z) telles que $N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1$ de telle sorte que la distance entre l'origine et le point de

coordonnées (N_x, N_y, N_z) soit égale à 1. Une autre façon de représenter une direction est de considérer les deux angles ϕ et ψ illustrés figure 5.8. La relation entre les angles et les coordonnées de la direction sont :

$$\begin{cases} N_x = \cos \phi \cos \psi \\ N_y = \sin \phi \cos \psi \\ N_z = \sin \psi \end{cases} \quad (5.12.3)$$

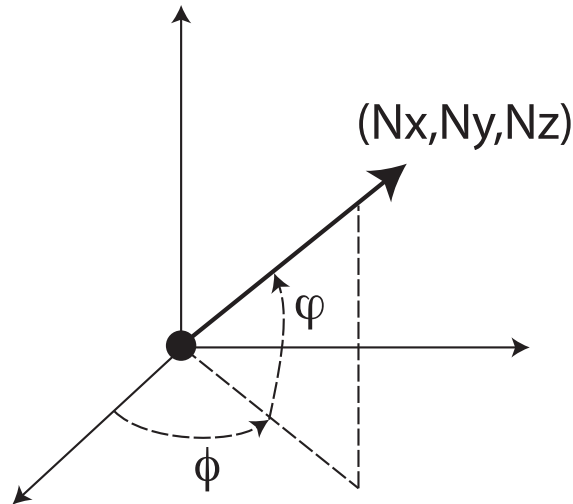


Figure 5.8 – Une direction (N_x, N_y, N_z) peut être également représentée par deux angles.

Une droite est représentée par un point quelconque le long de la droite (x_0, y_0, z_0) et sa direction (N_x, N_y, N_z) .

La distance, d , entre deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5.12.4)$$

Cette distance est, en un sens, une convention arbitraire qui définit l'espace dans lequel nous allons travailler. Cette définition de la distance est celle d'Euclide qui impose que nous travaillions dans un espace euclidien. Il existe beaucoup d'autres définitions de la distance, certaines utilisées par les géologues, comme la distance le long de grands cercles à la surface de la Terre.

On notera également que la distance entre (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est égale à la distance entre (x_2, y_2, z_2) et (x_1, y_1, z_1)

En deux dimensions, le point est représenté par un couple de coordonnées (x, y) , la direction est représentée par un couple de nombres (N_x, N_y) dont un seul cependant est indépendant ou nécessaire. Une droite est représentée par une relation linéaire entre les coordonnées x et y :

$$ax + by = c \quad (5.12.5)$$

La distance est définie par :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5.12.6)$$

5.13 Notation vectorielle

Pour simplifier l'écriture de points, de droites et de plans, on aura souvent recours à la notation vectorielle pour représenter un point ou une direction :

$$\mathbf{X} = (x, y, z) \quad (5.13.1)$$

Au tableau ou dans vos notes, il sera difficile de faire la différence entre une grandeur en gras et une autre; dans ce cas on utilise souvent l'une des alternatives suivantes pour représenter un vecteur :

$$\mathbf{X} = \vec{X} = \tilde{X} = (x, y, z) \quad (5.13.2)$$

A tout point de coordonnées (x, y, z) , on voit que l'on peut associer un vecteur, \vec{X} , ayant pour origine le centre du système de référence $(0, 0, 0)$ et pour extrémité le point de coordonnées (x, y, z) .

On se souvient de quelques propriétés des vecteurs :

$$- \vec{A} + \vec{B} = (x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B)$$

$$- \alpha \vec{A} = (\alpha x_A, \alpha y_A, \alpha z_A)$$

$$- A = \text{longueur de } \vec{A} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Il existe deux types de produits entre vecteurs :

$$- \text{le produit scalaire de deux vecteurs (dont le résultat est un scalaire)} : \vec{A} \cdot \vec{B} = (x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B)$$

- le produit vectoriel de deux vecteurs (dont le résultat est un vecteur) :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (y_A z_B - z_A y_B, z_A x_B - x_A z_B, x_A y_B - y_A x_B)$$

Pour retenir cette dernière définition (du produit vectoriel), il faut écrire les coordonnées des deux vecteurs les unes au dessus des autres comme suit :

$$\begin{array}{c} (x_A, y_A, z_A) \\ (x_B, y_B, z_B) \end{array} \quad (5.13.3)$$

et, pour obtenir la première composante du produit, masquer la première composante des deux vecteurs et effectuer la différence des produits en croix (coin supérieur gauche fois coin inférieur droit moins coin supérieur droit fois coin inférieur gauche). Répéter l'opération pour les deux autres composantes en ayant soin d'inverser l'ordre dans lequel on fait la croix pour la deuxième composante.

Chacun de ces produits a une représentation géométrique : le produit scalaire est le produit des longueurs des deux vecteurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs. Le produit vectoriel est un vecteur orienté perpendiculairement au plan formé par les deux vecteurs et dont la longueur est le produit des longueurs des deux vecteurs par le sinus de l'angle entre les deux vecteurs. Pour trouver l'orientation de ce vecteur il faut appliquer la règle de la main droite : le pouce selon le premier vecteur, l'index selon le second et le produit vectoriel pointe dans la direction de l'index lorsque les trois doigts forment un système de trois vecteurs dit "droit".

En utilisant la notation vectorielle, un point est représenté par un vecteur : \vec{X}_0 ; une direction est également représentée par un vecteur : \vec{N} , qui sera souvent unitaire ($N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1$) pour indiquer que seul deux de ses coordonnées sont indépendantes; un plan devient un produit scalaire : $\vec{N} \cdot \vec{X} = \beta$ où β est un scalaire; une droite est représentée par un point \vec{X}_0 et une direction \vec{N} et correspond à l'ensemble des points \vec{X} obéissant à la relation :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \alpha \vec{N} \quad (5.13.4)$$

α est la distance entre le point \vec{X} et le point \vec{X}_0 .

Dans la représentation du plan sous sa forme vectorielle :

$$\vec{N} \cdot \vec{X} = \beta \tag{5.13.5}$$

le vecteur \vec{N} représente la direction normale au plan et si \vec{N} est normalisé (de longueur 1), β est la distance entre le plan et l'origine du système de référence (0,0,0).

5.14 Distances, intersections

La distance entre un point et un plan est la longueur du segment rejoignant le point et le plan dans la direction de la normale au plan. C'est donc la plus petite distance entre le point et tout point appartenant au plan.

La distance d entre un plan $\vec{N} \cdot \vec{X} = \beta$ et un point \vec{P}_0 est donné par :

$$d = |\beta - \vec{N} \cdot \vec{P}_0| \tag{5.14.1}$$

On peut même parler de distance signée :

$$d = \beta - \vec{N} \cdot \vec{P}_0 \tag{5.14.2}$$

qui sera positive si le point \vec{P}_0 est situé du même côté que l'origine du plan. On peut utiliser cette définition pour diviser l'espace en deux semi-espaces correspondants aux points \vec{X} situés de part et d'autre du plan, les uns du même côté que le point origine - ils obéissent alors à la relation suivante - :

$$\beta - \vec{N} \cdot \vec{X} > 0 \tag{5.14.3}$$

et vice versa.

Le point d'intersection entre un plan $\vec{N} \cdot \vec{X} = \beta$ et une droite $\vec{X} = \vec{X}_0 + \alpha \vec{M}$ est donné par :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \frac{\beta - \vec{N} \cdot \vec{X}_0}{\vec{N} \cdot \vec{M}} \vec{M} \tag{5.14.4}$$

On remarquera que si la droite est parallèle au plan (\vec{M} est perpendiculaire à \vec{N} et $\vec{N} \cdot \vec{M} = 0$), il n'y a pas d'intersection. Certains puristes diront que l'intersection a lieu à l'infini.

L'intersection de deux plans $\vec{N} \cdot \vec{X} = \beta$ et $\vec{M} \cdot \vec{X} = \gamma$ est une droite d'équation $\vec{X} = \vec{X}_0 + \alpha \vec{L}$ où $\vec{L} = \vec{N} \times \vec{M}$, c'est-à-dire que la direction de la droite est le produit vectoriel des normales de deux plans. A noter que si les plans sont parallèles, leurs normales ont même direction et leur produit vectoriel est nul. Ils n'ont donc pas d'intersection (ou sont confondus). Le point X_0 est un point quelconque de l'intersection et on peut l'obtenir en trouvant une solution quelconque du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \vec{N} \cdot \vec{X} = \beta \\ \vec{M} \cdot \vec{X} = \gamma \end{cases} \tag{5.14.5}$$

Appliquons ceci à l'intersection des plans d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \tag{5.14.6}$$

Dans la notation vectorielle, ces plans ont pour équations :

$$\begin{cases} \vec{N} \cdot \vec{X} = \beta \\ \vec{M} \cdot \vec{X} = \gamma \end{cases} \quad (5.14.7)$$

avec $\vec{N} = (1, 0, 0)$ et $\vec{M} = (0, 1, 0)$, et $\beta = 1$ et $\gamma = 2$. La direction de la droite intersection des deux plans est donnée par :

$$\vec{N} \times \vec{M} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) \quad (5.14.8)$$

et un point appartenant aux deux plans est évidemment $\vec{P}_0 = (1, 2, 0)$. De telle sorte que l'équation de la droite intersection des deux plans est donnée par :

$$\vec{X} = (1, 2, 0) + \alpha(0, 0, 1) \quad (5.14.9)$$

5.15 Objets complexes

Hormis les droites, les plans et les points, d'autres objets géométriques très utiles au géologue sont représentés par des équations simples. Nous allons en donner la forme algébrique. Dans le chapitre suivant traitant de l'utilisation des matrices, nous montrerons comment les représenter sous forme vectorielle et matricielle.

5.15.1 Surfaces quadriques en deux dimensions

L'ellipse (Figure 5.9a) est une surface (courbe) bi-dimensionnelle dont l'équation dans le système de référence (x, y) nous est donnée par :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 1 \quad (5.15.1)$$

Les grandeurs a_x et a_y sont les demi-longueurs des axes de l'ellipse. L'ellipse est caractérisée par deux foyers situés symétriquement le long du grand axe de l'ellipse. la distance de ces deux foyers à tout point de l'ellipse est constante.

Le cercle est une ellipse dégénérée dont les axes sont égaux ($a_x = a_y = R$) où R est le rayon du cercle. La circonférence du cercle est donné par $2\pi R$ et sa surface par πR^2 .

La parabole (Figure 5.9b) est une surface bi-dimensionnelle ouverte d'équation :

$$x^2 = 2py \quad (5.15.2)$$

Attention la parabole ne possède pas de directions asymptotiques, c'est-à-dire que les deux branches de la parabole ne tendent pas vers des droites.

L'hyperbole (Figure 5.9c) est une surface bi-dimensionnelle composée de deux parties distinctes et d'équation :

$$\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2} = 1 \quad (5.15.3)$$

On voit qu'il existe des valeurs de x auxquelles ne correspondent aucune valeur de y . Ainsi, si $|x| < a_x$, $y^2 = a_y^2 \left(\frac{x^2}{a_x^2} - 1 \right)$ n'a pas de solution.

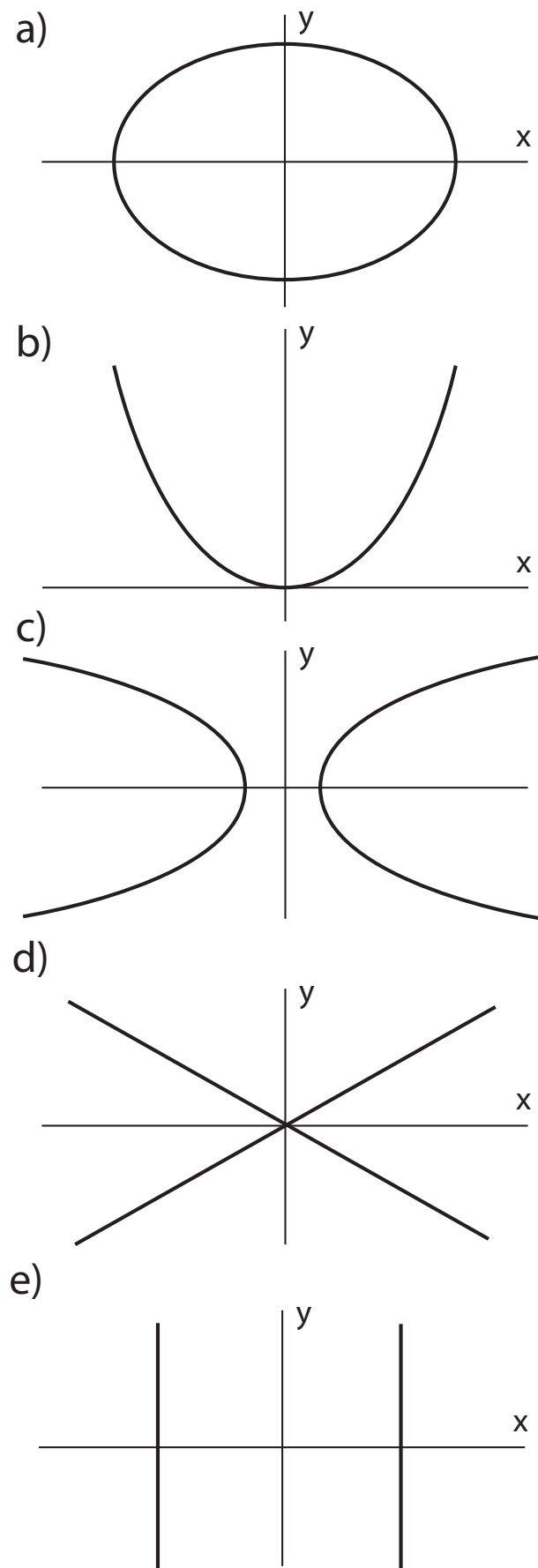


Figure 5.9 – a) Une ellipse. b) Une parabole. c) Une hyperbole. d) Deux plans sécants. e) Deux plans parallèles.

A noter que deux hyperboles dégénérées sont à considérer ; l'une correspond à deux droites sécantes (Figure 5.9d) :

$$\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2} = 0 \quad (5.15.4)$$

et l'autre à deux droites parallèles (Figure 5.9e) :

$$\frac{x^2}{a_x^2} = 1 \quad (5.15.5)$$

5.15.2 Surfaces quadriques en trois dimensions

L'ellipsoïde est la surface dont les points (x, y, z) satisfont à l'équation :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1 \quad (5.15.6)$$

A noter que cette équation représente un ellipsoïde particulier dont les axes sont alignés avec les axes du système de référence et centré à l'origine. Le volume de cet ellipsoïde est $\frac{4}{3}\pi a_x a_y a_z$. Comme on le voit sur la Figure 5.10, l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan est une ellipse.

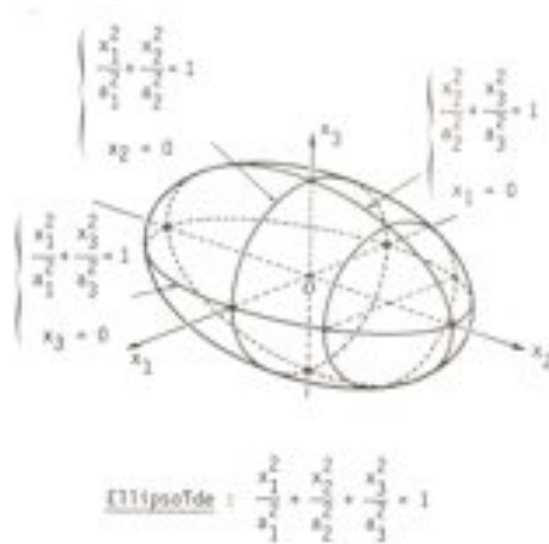


Figure 5.10 – Un ellipsoïde.

Il existe deux types de paraboloides. Le paraboloides elliptique (Figure 5.11a) est la surface dont les points satisfont à l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 2pz \quad (5.15.7)$$

et le paraboloides hyperbolique (Figure 5.11b) correspondant à l'équations suivante :

$$\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2} = 2pz \quad (5.15.8)$$

L'intersection d'un plan et d'un paraboloides elliptique est soit une parabole, soit une ellipse. L'intersection d'un plan et d'un paraboloides hyperboliques soit une parabole, soit une hyperbole.

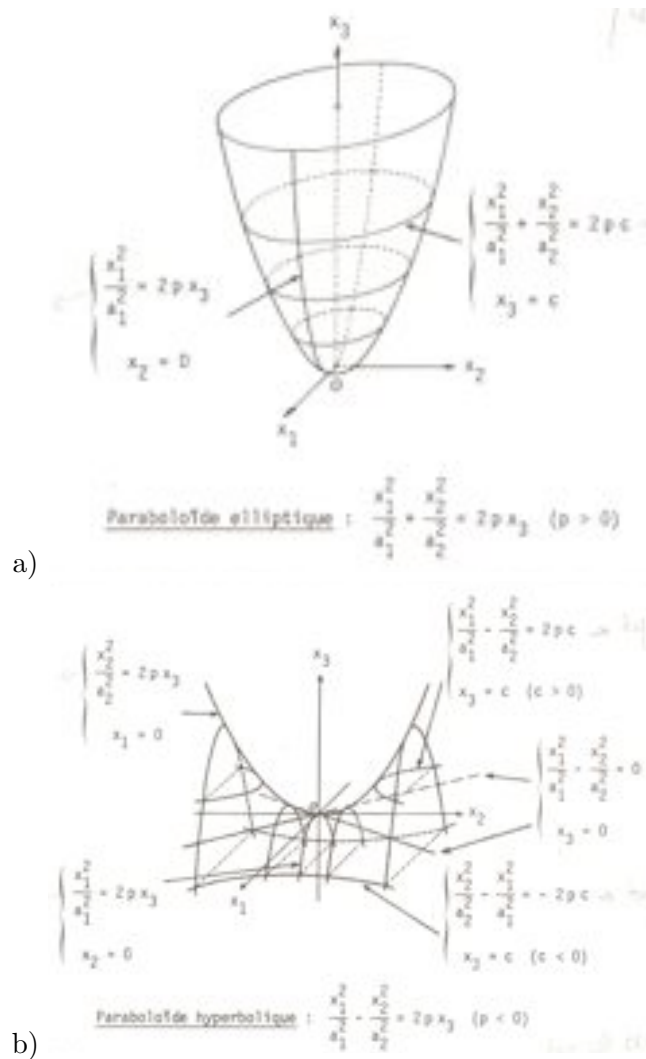


Figure 5.11 – a) Un paraboloïde elliptique. b) Un paraboloïde hyperbolique

Il existe également deux types d'hyperboloïdes. L'hyperboloïde à une nappe (Figure 5.12a), dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - \frac{z^2}{a_z^2} = 1 \tag{5.15.9}$$

et l'hyperboloïde à deux nappes (Figure 5.12b) dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = -1 \tag{5.15.10}$$

L'intersection d'un hyperboloïde et d'un plan peut être une hyperbole, une ellipse ou des droites.

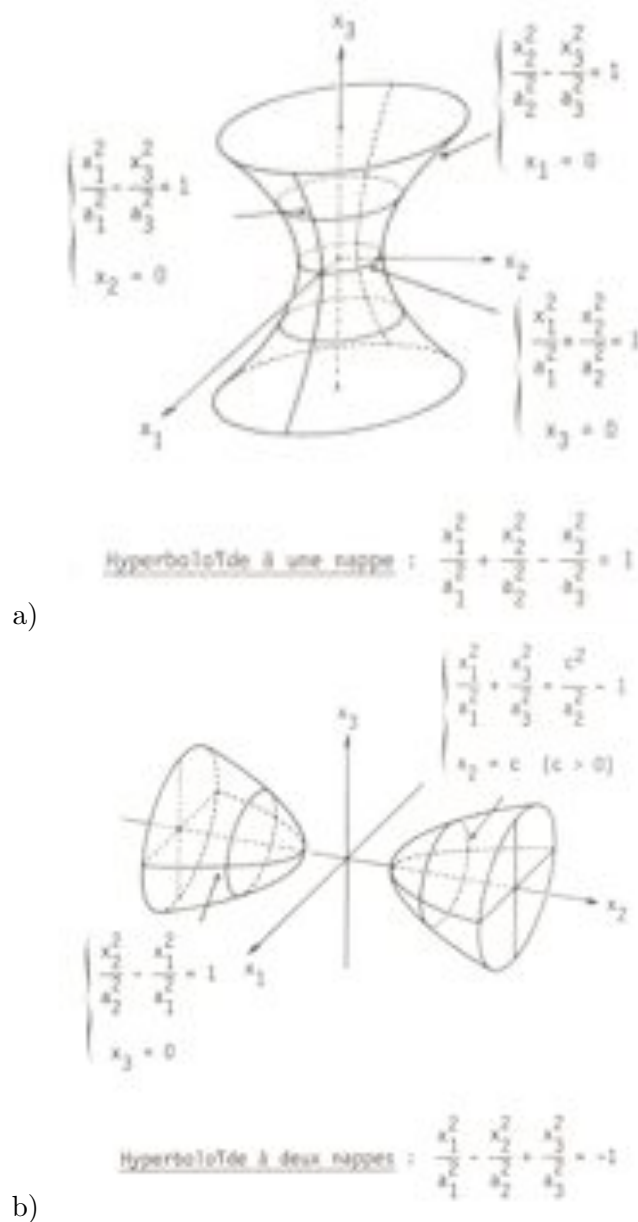


Figure 5.12 – a) Un hyperboloïde à une nappe. b) Un hyperboloïde à deux nappes.

Il existe des hyperboloïdes dégénérés intéressants : le cône (Figure 5.13a) d'équation :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - \frac{z^2}{a_z^2} = 0 \tag{5.15.11}$$

et le cylindre (Figure 5.13b), d'équation :

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 1 \quad (5.15.12)$$

L'intersection d'un cône par un plan est soit une ellipse, soit une droite, soit deux droites. L'intersection d'un cylindre par un plan est deux droites parallèles ou une seule droite.

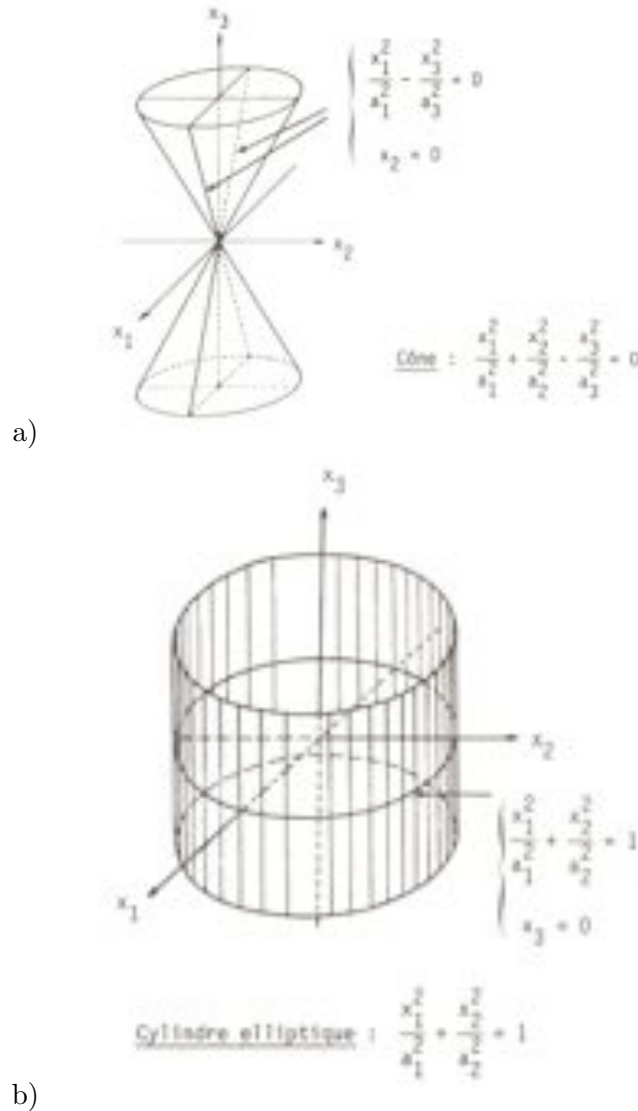


Figure 5.13 – a) Un cône. b) Un cylindre.

5.16 Points importants à retenir

1. Bien comprendre la correspondance entre degrés et radians.
2. Bien comprendre le diagramme expliquant la notion de sinus et cosinus à partir du cercle unitaire, ainsi que toutes les relations trigonométriques qui en découlent.
3. Comprendre et connaître les règles s'appliquant aux triangles rectangles et aux triangles quelconques.

4. Comprendre et utiliser les règles de trigonométrie sur le sinus, le cosinus et la tangente de la somme et de la différence entre deux angles.
5. Savoir manipuler toutes ces notions entre longueurs et angles pour résoudre des problèmes de géométrie simple.
6. Comprendre les deux règles de base de la trigonométrie sphérique en comprenant bien les différents types d'angles utilisés pour mesurer les distances et les angles à la surface de la Terre.
7. Savoir utiliser la formule donnant la distance entre deux points à la surface de la Terre.
8. Connaître la signification des différents types de projections cartographiques et leurs propriétés pour savoir choisir la projection appropriée à chaque tâche cartographique.
9. Connaître les équations représentant un point, une droite et un plan de manière algébrique et vectorielle.
10. Savoir calculer la distance entre deux points de l'espace.
11. Comprendre et savoir utiliser l'équation de l'intersection de deux plans, d'un plan et d'une droite, de la distance entre un plan et une droite.
12. Comprendre et utiliser l'équation d'une sphère et d'un ellipsoïde et autres surfaces quadratiques (coniques ou quadriques) afin de pouvoir représenter ces objets dans l'espace.

5.17 Travaux dirigés

Exercice 35

Les géodésiens vous diront qu'il est bien plus aisé de mesurer l'angle fait par deux points que la distance comprise entre ces deux points. Cela semble logique car pour mesurer une distance il faut aller d'un point à l'autre avec un mètre alors que pour mesurer un angle, on ne doit pas se déplacer ; il suffit d'utiliser un théodolite, par exemple. Cependant, le travail du géodésien est, en partie de mesurer la position absolue ou relative de marqueurs dits "géodétiques" afin de caler les cartes topographiques (ou géologiques) mais aussi afin de mesurer la déformation de la terre (par des processus tectoniques par exemple) en mesurant ces distances à intervalles de temps réguliers et estimer si elles changent en fonction du temps. Nous allons donc montrer qu'il est possible de calculer toutes les distances entre des points situés aux sommets de triangles en ne mesurant qu'une distance entre deux points avec grande précision et en mesurant des angles. Commençons par un premier triangle et supposons que nous avons mesuré un de ses côtés ainsi que les angles fait par ce côté et le troisième point vu d'une extrémité ou l'autre du côté mesuré. Ainsi dans la figure 5.14, nous connaissons la longueur L_{12} et les angles α_1 et α_2 . Dériver les formules permettant de calculer la longueur des deux autres côtés (L_{23} et L_{31}).

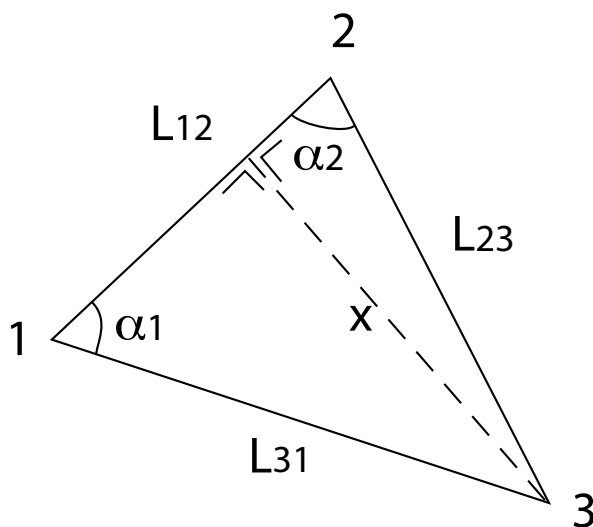


Figure 5.14 – Un triangle dont on connaît la longueur d'un côté et deux de ses angles. Comment calculer la longueur des deux autres côtés ?

Exercice 36

Maintenant montrer comment vous pouvez mesurer tous les côtés d'une triangulation quelconque (comme illustrée dans la figure 5.15 à partir de la mesure d'une longueur et d'un minimum de mesures d'angles).

Exercice 37

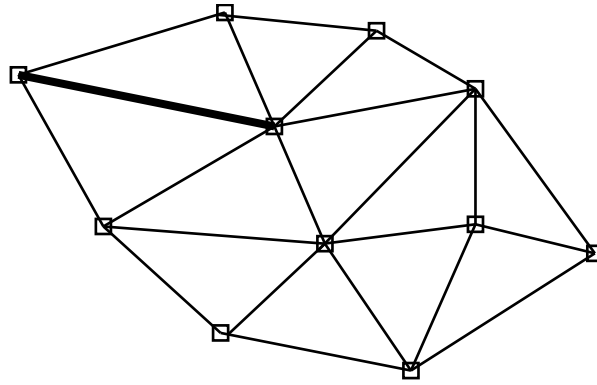


Figure 5.15 – Une triangulation. Comment, à partir de la connaissance de la longueur d’un des côtés d’un triangle (trait gras) peut-on déterminer toutes les autres longueurs/distance, en ne mesurant que des angles ?

Calculez la distance entre Rennes (Latitude= $48^{\circ}07'N$, longitude= $01^{\circ}41'W$) et Grenoble (Latitude= $45^{\circ}12'N$, longitude= $05^{\circ}42'E$) en tenant compte de la sphéricité de la Terre.

Exercice 38

Calculez la distance entre les villes suivantes en tenant compte de la sphéricité de la Terre.

Table 5.4 – Paires de villes entre lesquels on devra calculer la distance à la surface de la Terre.

Ville 1	Ville 2
Paris	Moscou
Paris	Tokyo
Paris	Sydney
Paris	Berlin
Paris	Le Cap

Exercice 39

Calculez la superficie (aire) du Bassin de Paris en considérant qu’il a la forme d’un quadrilatère sphérique de sommets : Poitiers, Le Havre, Calais et Bar-le-Duc.

Exercice 40

Reportez les points suivants (Tableau 5.5) sur un abaque de Wulff. Déterminez si ces directions définissent un plan et, si c’est le cas, quel est son pendage (maximum) et l’azimut de ce pendage ?

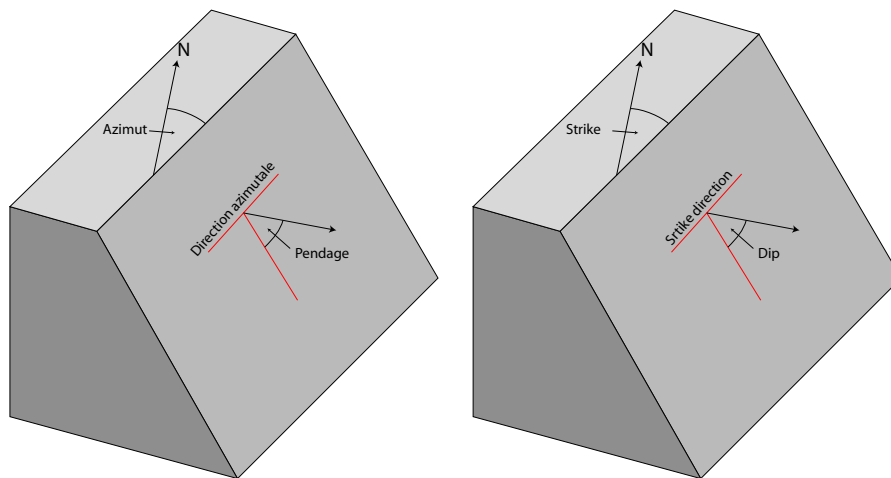
Exercice 41

Quelle est la direction (azimut) de la trace d’un plan stratigraphique plongeant vers le nord à un angle

Table 5.5 – Mesures de pendage et d'azimut (en degrés).

Azimut	Pendage
40	25
87	35
144	22
132	28
13	10
53	30
115	32

de 30° lorsqu'il est intercepté par une colline de pente 20° vers l'azimut 45° nord-est. Rappelons que tout plan est défini par un azimut, ou *strike* en anglais, (celui de sa trace dans un plan horizontal) et un pendage, ou *dip* en anglais, l'angle que fait la ligne de plus grande pente avec l'horizontal (voir Figure 5.16).

**Figure 5.16** – Les deux angles définissant un plan en géologie (en français et en anglais).**Exercice 42**

Un forage très délicat est en court : il s'agit d'un forage oblique faisant un angle de 30° par rapport à la verticale en direction plein est. Vous voudriez connaître la distance de forage (longueur de la carotte) nécessaire pour atteindre un plan de faille d'azimuth 45° et de pendage 35° (NO). Vous savez que votre forage a débuté à une distance de 150 m de la trace de la faille. Le forage a lieu aux Pays-Bas.

Autres usages des matrices

6.1 Objectifs

- Comprendre l’usage des matrices en géologie (contrainte, déformation)
- Comprendre la notion de changement de coordonnées et de diagonalisation
- Comprendre la notion d’invariant (déterminant et trace)
- Introduire la notion de grandeur propre et valeur propre
- Toutes ces notions sont à mettre en rapport à des problèmes de déformation
- Représenter les surfaces en 3D sous notation tensorielle

6.2 Introduction

Les matrices, nous l’avons vu au début de ce cours (section 2.3), sont des objets mathématiques permettant de travailler avec des ensemble carrés (ou rectangulaires) de nombres. Leur application première est dans la description et la résolution de systèmes d’équations linéaires. Mais le géologue a d’autres raisons d’utiliser les matrices. Principalement dans la description de l’état de contraintes d’un système géologique (grâce au tenseur des contraintes) et de son état de déformation (le tenseur des déformations). Nous verrons également comment les matrices (et les tenseurs d’ordre deux qui sont pour nous des matrices carrées de dimension égale à la dimension de l’espace dans lequel nous travaillons, 2D ou 3D) peuvent être utilisées pour compléter les notions de géométrie analytique (et vectorielle) que nous avons vues au chapitre précédent.

Avant tout, nous allons étudier quelques nouvelles propriétés des matrices, montrer à quoi elles peuvent servir pour représenter un tenseur comme le tenseur des contraintes, et comment elles sont utilisées pour représenter une rotation matérielle dans l’espace. Nous combinerons tout cela pour introduire la notion de valeur propre et de vecteur propres et comment ces notions nous seront utiles.

6.3 Invariants

Nous allons nous intéresser principalement aux matrices carrées, et surtout, celles de dimension 2 ou 3. Pourquoi? En géométrie, la notion de vecteur se généralise à celle de “tenseur” lorsque, par

exemple, il va falloir considérer toutes les combinaisons possible des trois dérivées spatiales des trois composantes d'un vecteur. Ceci va nous mener à considérer des grandeurs faites de neuf scalaires. En deux dimensions, ceci mène à des grandeurs faites de quatre scalaires. Pour cela, les mathématiciens ont introduits des grandeurs qu'ils vont appeler tenseurs et qu'il représentent par des matrices carrées, typiquement de trois par trois dans un espace à trois dimensions et de deux par deux dans un espaces à deux dimensions.

Nous avons jusqu'à présent considéré des indices entiers pour représenter les composantes d'une matrice : A_{ij} , tandis qu'en géométrie analytique, nous considérons les trois composantes de l'espaces par les lettres x , y et z . Pour pouvoir combiner ces différents aspects de la géométrie et du calcul matriciel, nous allons maintenant remplacer les coordonnées x , y et z par les nombres 1, 2 et 3. Ce n'est qu'une convention.

Nous allons principalement étudier le cas de matrices de 3×3 , avec une simplification évidente en ce qui concerne les matrices de 2×2 . Si un vecteur représente les trois composantes d'une direction ou d'un point en géométrie, un tenseur représente donc, en général, la variation de ces trois composantes dans les trois directions de l'espace. Cela signifie que la valeur des composantes de ce tenseur va dépendre de l'orientation que nous allons donner aux axes de références ainsi que de l'origine de ces axes. SI nous changeons l'origine, cela revient à imposer une translation du système de référence. Si nous en changeons l'orientation, il s'agira d'une rotation du système de référence.

Si, lors d'une rotation, les composantes d'un tenseur (d'une matrice de 3×3) changent, il existe certaines combinaisons de ces composantes qui ne changent pas. Ces "invariants" sont au nombre de trois (dans un espace de dimension 3) :

1. la trace du tenseur : $\text{tr } A = A_{11} + A_{22} + A_{33}$
2. le second invariant : $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) + (A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) + (A_{33}A_{11} - A_{31}A_{13})$
3. le déterminant : $\text{dtm } A = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{21}A_{32}A_{13} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{21}A_{12}A_{33} - A_{23}A_{32}A_{11}$

La formule du déterminant se retient par un petit diagramme (figure 6.1).

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\
 - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Figure 6.1 – Comment calculer le déterminant d'une matrice de 3×3 et de 2×2 .

En deux dimensions, ces définitions se simplifient (et il n'y a que deux invariants) :

1. la trace du tenseur : $\text{tr } A = A_{11} + A_{22}$
2. le déterminant : $\text{dtm } A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

A noter que le déterminant de la matrice construite à partir de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs (en 2D) et le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs (en 3D).

Le déterminant n'est pas juste un invariant des tenseurs. Toute matrice carrée de n par n possède un déterminant. Son calcul se complexifie lorsque la taille n de la matrice augmente. Il existe une règle générale donnant le déterminant d'une matrice A de taille n par n :

Le déterminant est la somme des produits de chaque élément d'une de ses colonnes par le mineur de cet élément affublé d'un signe positif si l'élément est sur la diagonale ou à une distance paire de la diagonale, et d'un signe négatif sinon. Le mineur d'un élément d'une matrice est le déterminant construit en enlevant la ligne et la colonne correspondant à cet élément.

On remarque que cette formule est basée sur une récurrence car elle permet de calculer un déterminant à partir d'une somme de déterminant plus petit (de matrices d'ordre inférieur), mais personne ne se mettant à calculer des déterminants de matrices de taille supérieure à 3×3 , nous ne la retiendrons pas...

Revenons pour un instant à l'utilisation des matrices dans la résolution des systèmes d'équations linéaires. On peut montrer que si deux lignes d'une matrice sont linéairement dépendante (on peut obtenir l'une en multipliant l'autre par une constante), alors soit le système n'a pas de solution (si les termes du membre de droite correspondants satisfont la même relation linéaire), soit le système à une infinité de solution (car il manque en fait une équation). Dans les deux cas, on ne peut pas trouver de solution au système. Une façon "simple" de vérifier que le système possède une solution est de calculer son déterminant. En effet on peut montrer que si deux lignes de la matrice sont linéairement dépendante, alors le déterminant de la matrice est nul.

La définition de la trace d'une matrice de n par n est plus simple :

$$\text{tr } A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} \quad (6.3.1)$$

6.4 Tenseur des contraintes

Dans la Terre, de nombreuses forces agissent sur les roches. A l'échelle des processus tectoniques, ces forces ont leur origine dans le manteau terrestre, où la chaleur dégagée par la désintégration d'éléments radioactifs tels que l'U et le Th, ainsi que par le refroidissement séculaire du noyau est dégagée par convection. La convection du manteau est une façon qu'il a de dégager cette chaleur dont il ne peut se défaire par conduction. La convection est le mouvement de régions chaudes du manteau qui, étant plus légères que le reste du manteau, montent vers la surface sous l'effet du champ de gravité de la terre. De même les régions froides, étant plus denses, descendent vers la base du manteau. Ces mouvements sont à l'origine du mouvement des plaques tectoniques qui, de par leurs interactions, principalement le long de leurs frontières communes, causent le raccourcissement de la croûte ou son amincissement, et, ainsi mènent à la formation de montagnes ou de zone de rifting, continentales ou océaniques.

Comme tout mécanicien, le géologue doit comprendre ces forces, mais ils ne peut les mesurer. Tout au plus, peut-il en mesurer les effets, c'est-à-dire la déformation des roches résultant de ces forces tectoniques. Il va devoir décrire la déformation de la croûte, par le mouvement des failles ou une déformation plus fluide ou ductile là où la température le permet. La relation entre force et déformation est appelée la "rhéologie" des roches.

Puisque le géologue fait fasse à un continuum (milieu continu), il ne va pas décrire les forces à l'aide de vecteurs forces, mais il va utiliser la notion de contrainte, introduite pour permettre une description plus fine des forces dans un milieu continu. Considérons, à cet effet, un petit élément de roche de taille Δx par Δy par Δz , comme illustré dans la figure 6.2. Sur chaque face de ce cube s'exercent trois forces, l'une normale à la face et les deux autres tangentielles. Ainsi sur la face perpendiculaire à l'axe des x , s'exerce une force normale parallèle à l'axe des x , σ_{xx} , et deux forces tangentielles, l'une parallèle à l'axe des y , τ_{yx} , et l'autre parallèle à l'axe des z , τ_{zx} . Cela fait un total de 9 forces que l'on va rassembler en un tenseur d'ordre deux (car chaque composante a deux indices), le tenseur des contraintes. Les contraintes ne sont pas exactement des forces, mais puisqu'elle s'applique à un petit élément de matière (infinitésimal, ou infiniment petit), on les définit comme des forces par unité de surface. C'est-à-dire que pour retrouver la force, il faut considérer la surface sur laquelle s'applique la contrainte. Les unités de contraintes sont le Newton (unité de force) par m^2 (unité de surface) ou le Pascal (Pa).

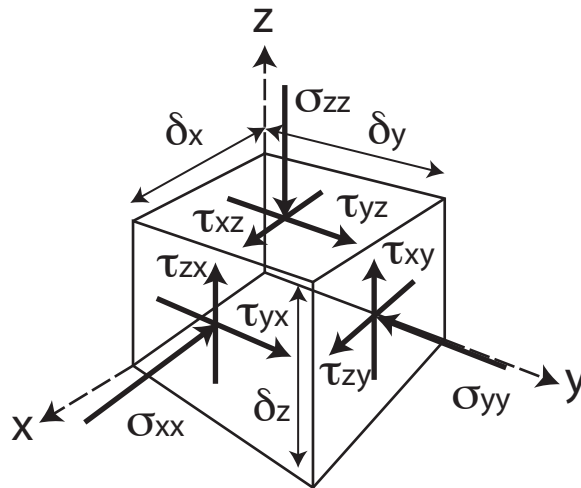


Figure 6.2 – Les composantes du tenseur des contraintes.

On notera ce tenseur par la lettre sigma, et ses composantes sont souvent notées :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (6.4.1)$$

La trace du tenseur des contraintes n'est autre que la "pression" :

$$\text{tr } \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \frac{1}{3} p = \sigma_I \quad (6.4.2)$$

Les deux autres invariants (le déterminant, σ_{III} , et le second invariant, σ_{II}) sont souvent utilisés en mécanique des roches, par exemple pour définir les différents critères de rupture, tels que le critère de Coulomb :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3} \cos \phi} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} \tan \phi \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \sigma_{II} - \sigma_I \tan \phi = c \quad (6.4.3)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left[\left(\frac{\sigma_{III}}{\sigma_{II}}\right)^3\right]$$

où c est la cohésion et ϕ l'angle de friction interne, ou le critère de Von Mises

$$\sqrt{\sigma_{II}} = k \quad (6.4.4)$$

où k est le seuil de rupture, ou le critère de Griffith-Murrell :

$$\sigma_{II} = 4T_0\sigma_I \quad (6.4.5)$$

où T_0 est la résistance à la traction. Nous verrons plus loin que ces critères correspondent à des formes géométriques lorsqu'on les considère dans un espace réduit des composantes du tenseur des contraintes.

A noter que d'après la seconde loi de Cauchy (qui exprime par les contraintes que dans un solide le moment des forces est nulle), le tenseur des contraintes est symétrique. Cela signifie que l'on peut donc écrire :

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} \quad (6.4.6)$$

6.5 Le gradient de vitesse

Une autre façon de construire un tenseur d'ordre deux est de prendre un vecteur (par exemple, le vecteur vitesse) et de prendre les dérivées spatiales de ses composantes. Ainsi on définit le tenseur "gradient de vitesse" de la façon suivante :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.5.1)$$

sa trace est une mesure de la dilatation :

$$\text{tr } L = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \vec{v} \quad (6.5.2)$$

Le gradient de vitesse est un tenseur qui nous renseigne comment le champs de vitesse varie spatialement ; c'est donc une mesure de la vitesse de déformation car si un corps est soumis à des variations internes de vitesse, il doit se déformer.

Un autre tenseur que l'on utilise souvent pour décrire la vitesse à laquelle un corps se déforme, est le tenseur des vitesses de déformation (strain rate tensor) :

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.5.3)$$

Ce tenseur est souvent utilisé car, contrairement au tenseur du gradient de vitesse, il est toujours symétrique, c'est-à-dire que :

$$\dot{\epsilon}_{ji} = \dot{\epsilon}_{ij} \quad (6.5.4)$$

et sa trace est aussi une mesure du changement de volume.

On utilise également le tenseur des déformations infinitésimales qui est défini comme le tenseur des vitesses de déformation mais à partir du vecteur de déplacement \vec{u} , plutôt que vitesse :

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.5.5)$$

Le vecteur de déplacement est la différence de position d'un point entre deux instants donnés ou dans deux états de déformation donnés. Le tenseur défini ci-dessus est principalement utilisé lorsque les deux états sont très proches l'un de l'autre, ce qui est le cas par exemple lorsque la déformation est élastique, un cas souvent rencontré en géologie (déformation des roches dues au passage des ondes sismiques, déformation de la lithosphère sous le poids des îles volcaniques, comme Hawaii, etc.)

6.6 La rotation

Nous avons vu que les composantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) dépendent du système de référence que nous utilisons pour le décrire. Il existe bien des "invariants" associés aux tenseurs qui ne dépendent pas du système de référence, mais il est important de pouvoir passer d'un système de référence à un autre sans trop de difficultés, surtout lorsqu'il s'agit de rotation. De plus pour tous les tenseurs symétriques, il existe un système de référence très particulier que nous allons utiliser pour grandement nous simplifier la vie dans la description des tenseurs. Le géologue l'utilise tous les jours sur le terrain, souvent sans le savoir.

Mais avant d'en arriver là, utilisons quelques outils que les mathématiciens ont développés pour nous. Considérons un nouveau système de référence que celui que nous avons utilisé pour définir par exemple le tenseur des contraintes. Nous supposons que ce système à la même origine, mais que les axes, bien qu'orthogonaux entre eux, ne sont pas alignés avec ceux du système initial; ils ont subi une rotation. Nous pouvons donc décrire ces trois axes par trois vecteurs : \vec{E}^x , \vec{E}^y et \vec{E}^z dont les coordonnées sont connues dans le système initial. Puisqu'il ne s'agit que d'une rotation entre les deux systèmes de références (pas de changement de longueur des axes), nous pourrions supposer que ces trois vecteurs sont de longueur unitaire.

Les mathématiciens ont défini le tenseur des rotations, R , de la façon suivante : ses colonnes sont les composantes des trois vecteurs représentant les axes du nouveau système de référence :

$$R = \begin{pmatrix} E_x^x & E_x^y & E_x^z \\ E_y^x & E_y^y & E_y^z \\ E_z^x & E_z^y & E_z^z \end{pmatrix} \quad (6.6.1)$$

Cette matrice jouit de propriétés intéressantes :

1. son inverse est son transposé : $R^{-1} : R^T$

2. son déterminant est toujours égal à 1 : $\text{dtm } R = 1$

Grâce à cette matrice nous pouvons maintenant passer facilement d'un système de référence à l'autre. En effet si nous connaissons les composantes d'un vecteur \vec{v} , dans un système de référence, nous pouvons en déduire ses composantes, \vec{v}^R dans le système de référence qui a subi une rotation quelconque définie par R , grâce à la relation suivante :

$$\vec{v}^R = R^T \vec{v} \quad (6.6.2)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_x^R \\ v_y^R \\ v_z^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (6.6.3)$$

Nous pouvons également trouver les composantes d'un tenseur (par exemple le tenseur des contraintes σ) dans le nouveau système de référence, grâce à la relation suivante :

$$\vec{\sigma}^R = R^T \sigma R \quad (6.6.4)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^R & \tau_{xy}^R & \tau_{xz}^R \\ \tau_{yx}^R & \sigma_{yy}^R & \tau_{yz}^R \\ \tau_{zx}^R & \tau_{zy}^R & \sigma_{zz}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{pmatrix} \quad (6.6.5)$$

Nous allons voir maintenant que pour tout tenseur symétrique (comme le tenseur des contraintes), il existe toujours un système de référence, et donc une matrice de rotation, tels que ce tenseur y prenne une forme diagonale :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^R & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{pmatrix} \quad (6.6.6)$$

Cela signifie que, si nous pouvons trouver ce système de référence, nous n'aurons plus qu'à nous inquiéter de trois plutôt que 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes. Comme les géologues sont tout aussi fainéants que les mathématiciens, nous allons essayer de trouver ce système de référence et la matrice de rotation qui lui correspond. Mais pour cela nous devons d'abord introduire des notions assez abstraites : les valeurs et vecteurs propres d'une matrice (ou d'un tenseur).

6.7 Valeurs/vecteurs propres

Soit une matrice \mathbf{A} que nous allons supposer symétrique. Les solutions de son "polynôme caractéristique" :

$$\text{dtm}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (6.7.1)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité, sont appelées les "valeurs propres" de la matrice. Elles sont au nombre de n où n est la taille de la matrice. Dans le cas de tenseurs, n est la dimension de l'espace dans lequel ils

ont été définis. A noter que la solution du polynôme caractéristique peut mener à des valeurs propres doubles, voire une valeur propre triple.

A chaque valeur propre, λ^i ($i = 1, 2, 3$), correspond un vecteur propre, \vec{v}^i , solution du système d'équations linéaires :

$$\mathbf{A}\vec{v}^i = \lambda^i \vec{v}^i \quad (6.7.2)$$

On peut démontrer qu'en général les vecteurs propres sont orthogonaux et qu'ils sont au même nombre que les valeurs propres. A noter également que les vecteurs propres ne sont définis qu'à un facteur constant près. Donc nous pouvons toujours nous organiser pour que les vecteurs propres soient de longueur unitaire. Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, nous pouvons construire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres :

$$R = \begin{pmatrix} v_x^1 & v_x^2 & v_x^3 \\ v_y^1 & v_y^2 & v_y^3 \\ v_z^1 & v_z^2 & v_z^3 \end{pmatrix} \quad (6.7.3)$$

ou, si nous remplaçons x, y, z par 1, 2, 3 :

$$R = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} \quad (6.7.4)$$

et puisque nous avons normalisé ces vecteurs et qu'ils sont orthogonaux entre eux, cette matrice est une matrice de rotation. Nous pouvons donc l'utiliser pour faire tourner la matrice de départ. On peut montrer que la rotation d'une matrice par la matrice de ses vecteurs propres est une matrice diagonale dont les composantes ne sont autres que les valeurs propres de la matrice... Magique !

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} \quad (6.7.5)$$

Si nous appliquons ce résultat au tenseur des contraintes, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^1 & v_x^2 & v_x^3 \\ v_y^1 & v_y^2 & v_y^3 \\ v_z^1 & v_z^2 & v_z^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^1 & v_y^1 & v_z^1 \\ v_x^2 & v_y^2 & v_z^2 \\ v_x^3 & v_y^3 & v_z^3 \end{pmatrix} \quad (6.7.6)$$

en repassant aux composantes x, y, z . Nous appellerons les valeurs propres du tenseur des contraintes, les "contraintes principales". Et les vecteurs propres du tenseur des contraintes, les "directions principales". Les géologues, par convention, choisiront σ^1 pour être la plus compressive (ou "contrainte maximale") de ces contraintes principales et σ^3 la moins compressive (ou "contrainte minimale"). La valeur propre intermédiaire est appelée "contrainte intermédiaire".

L'un des boulots du géologue structural sera de considérer les structures ou témoins de la déformation de la croûte, pour essayer d'en déduire la géométrie des directions principales, ou, à minima, la direction de la contrainte maximale, σ^1 . En effet, si nous connaissons la direction régionale de σ_1 (ou de σ_3), nous pouvons en déduire la direction de compression (ou d'extension) du système de forces tectoniques responsables de la déformation et donc, contraindre le régime tectonique régionale.

6.8 Quadriques

Maintenant que nous connaissons tout des tenseurs, nous pouvons les utiliser en géométrie également pour représenter des surfaces plus complexes que celles que nous avons présentées au chapitre précédent. Un exemple utile est celui du parabolôïde elliptique représentant le critère de Griffith-Murrell, vu ci-dessus. En effet, exprimé en terme des composantes principales du tenseur des contraintes, celui-ci devient :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X} = 0 \quad (6.8.1)$$

où,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma_2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = 2T_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.8.2)$$

On peut montrer qu'il y a bien équivalence entre cette forme et celle donnée plus haut (équation 6.4.5).

Toutes les surface quadriques peuvent se représenter sous la forme :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X} + c = 0 \quad (6.8.3)$$

L'intersection entre une droite et une quadrique est l'ensemble des points satisfaisants à l'équation 6.8.3 et aussi à l'équation représentant une droite passant par \mathbf{X}_0 et de direction \mathbf{N} :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \alpha \mathbf{N} \quad (6.8.4)$$

En combinant ces deux expression, on obtient :

$$(\mathbf{X}_0 + \alpha \mathbf{N})^T \mathbf{H} (\mathbf{X}_0 + \alpha \mathbf{N}) + 2\mathbf{B}^T (\mathbf{X}_0 + \alpha \mathbf{N}) + c = 0 \quad (6.8.5)$$

ou encore, en regroupant les termes en α^2 , α et α^0 :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{H} \mathbf{N} \alpha^2 + 2(\mathbf{H} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B})^T \mathbf{N} \alpha + \mathbf{X}_0^T \mathbf{H} \mathbf{X}_0 + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X}_0 + c = 0 \quad (6.8.6)$$

qui est une équation du second degré en α . Ses solutions dépendent de la valeur de chacun des termes multipliant α^2 , α et α^0 . Si $\mathbf{N}^T \mathbf{H} \mathbf{N} \neq 0$, alors la solution dépend de la valeur du discriminant :

$$\rho = ((\mathbf{H} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B})^T \mathbf{N})^2 - (\mathbf{N}^T \mathbf{H} \mathbf{N})(\mathbf{X}_0^T \mathbf{H} \mathbf{X}_0 + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X}_0 + c) \quad (6.8.7)$$

Si $\rho > 0$, il existe deux solutions et la droite est sécante à la quadrique en deux points. Si $\rho = 0$, il n'existe qu'une solution (double) et la droite est tangente à la quadrique. Si $\rho < 0$, il n'existe pas de solution et la droite et la quadrique ne sont pas sécantes.

Si $\mathbf{N}^T \mathbf{H} \mathbf{N} = 0$, l'équation en α est une équation linéaire et trois cas sont à considérer. Si $(\mathbf{H} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B})^T \mathbf{N} \neq 0$, il existe une solution et l'intersection est un point. Si $(\mathbf{H} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B})^T \mathbf{N} = 0$ et $\mathbf{X}_0^T \mathbf{H} \mathbf{X}_0 + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X}_0 + c \neq 0$, il n'y a pas de point en commun entre la droite et la quadrique, ce qui est équivalent à ce que la droite soit une asymptote de la quadrique. Si $(\mathbf{H} \mathbf{X}_0 + \mathbf{B})^T \mathbf{N} = 0$ et $\mathbf{X}_0^T \mathbf{H} \mathbf{X}_0 + 2\mathbf{B}^T \mathbf{X}_0 + c = 0$, cela signifie qu'il existe une infinité de solution et la droite est dans la quadrique.

Finalement, notons que la normale, \mathbf{T} , à toute surface paramétrique peut être obtenue en dérivant l'expression paramétrique par rapport à \mathbf{X} , ce qui donne :

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (6.8.8)$$

6.9 Points importants à retenir

1. ce que sont les invariants d'une matrice et quels sont-ils (nombre et forme)
2. comprendre comment calculer le déterminant d'une matrice d'ordre deux ou trois
3. comprendre à quoi correspondent les tenseurs des contraintes, du gradient de vitesse, de vitesse de déformation, de déformation infinitésimale
4. qu'est-ce qu'une rotation ; comment on construit la matrice des rotations et comment on l'applique à un vecteur ou à un tenseur pour le faire "tourner" d'un système de référence à l'autre
5. que sont les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice
6. comment on peut s'en servir pour diagonaliser une matrice symétrique
7. à quoi correspondent les contraintes et directions principales
8. comment représenter une surface quadrique par le produit de matrices et vecteurs
9. comment trouver les différentes possibilités d'intersection entre une quadrique et une droite

6.10 Travaux dirigés

Exercice 43

Calculez la solution de ce système en calculant l'inverse de la matrice correspondante.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \quad (6.10.1)$$

Exercice 44

Soit la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10.2)$$

Calculez : $\text{dtm } \mathbf{A}$, $\text{tr } \mathbf{A}$, \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ et $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

Exercice 45

Résoudre le système d'équations obtenu dans l'exercice (4) du premier chapitre concernant l'évolution du prix d'extraction et de vente d'un minerai, mais en calculant la matrice inverse.

Exercice 46

Calculez les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (6.10.3)$$

En déduire la valeur du déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.10.4)$$

Exercice 47

Vérifiez que les systèmes d'équations linéaires suivants ont une solution :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 - z \\ y - z = -3x \\ -2y = 7 + 2z + 4x \end{cases} \quad (6.10.5)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad (6.10.6)$$

Si oui, quelle est elle ?

Exercice 48

Déterminez le déterminant et l'inverse de la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (6.10.7)$$

Exercice 49

1. On considère les vecteurs \vec{E}_x , \vec{E}_y et \vec{E}_z obtenus en tournant les vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^3 d'un angle θ autour de l'axe (Oy) . Déterminer \vec{E}_x , \vec{E}_y et \vec{E}_z en fonction des vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z de la base canonique. En déduire la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{E}_i\}$.
2. Les vecteurs \vec{F}_x , \vec{F}_y et \vec{F}_z sont obtenus à partir de \vec{E}_x , \vec{E}_y et \vec{E}_z par une symétrie par rapport au plan (xOz) . Déterminer la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{F}_i\}$.
3. Les vecteurs \vec{G}_x , \vec{G}_y et \vec{G}_z sont obtenus à partir de \vec{E}_x , \vec{E}_y et \vec{E}_z par une rotation d'angle ϕ autour de l'axe dirigé selon \vec{E}_z . Déterminer la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{G}_i\}$.

Exercice 50

1. On considère à présent une rotation de la base canonique $\{\vec{e}_i\}$ d'angle $\theta = \pi/3$ Rad autour de l'axe (Ox) . Écrire sans calculs la matrice de passage correspondante (vous pourrez "deviner" cette matrice par analogie avec l'exercice 2).
2. Déterminer les coordonnées dans la nouvelle base du vecteur de coordonnées

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Déterminer les coordonnées dans la base canonique du vecteur dont les coordonnées dans la nouvelle base sont

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la matrice A s'écrivant dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

4. Exprimer la matrice A dans la nouvelle base. Calculer la trace et le déterminant de la nouvelle matrice. Que constatez-vous?

Exercice 51

Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10.8)$$

Exprimer les scalaires $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(A^{-1})$, $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ en fonction de ces valeurs propres et retrouver leurs valeurs déterminées dans l'exercice 1.

Exercice 52

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

est-elle une matrice symétrique ?

2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de A .
3. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormée de vecteurs propres de A .
4. Calculer $P^{-1}AP$.
5. Calculer $\det(A)$.

Statistique

7.1 Objectifs

- Introduire des notions de bases de statistiques en se basant sur l'étude de données/mesures géologiques
- Introduire des outils de base tels que l'histogramme
- Donner quelques notions de probabilité
- Introduire la notion de régression linéaire et donner les éléments permettant de la comprendre et l'utiliser à bon escient
- Introduire la notion d'erreur et comment les différentes sources d'erreurs se combinent et se propagent

7.2 Notions de base

Le géologue est amené à faire des mesures sur le terrain ou dans le laboratoire. L'observation géologique est, par nature, incomplète car elle est le résultat de l'intégration de processus sur des échelles de temps et d'espace énormes. Ainsi le pendage d'une faille dépend de paramètres mécaniques de la masse de roche qu'elle traverse, de l'évolution de cette faille pendant sa période d'activité et puis de l'évolution du massif au travers des événements tectoniques postérieurs. Finalement ce que nous en observerons est, en général, une partie exhumée de la faille et sa géométrie apparente ou réelle sera fonction de la géométrie de la surface, résultat de processus d'érosion complexes et aléatoires.

De même un géochronologue fera rarement une mesure unique de composition isotopique dans un grain extrait d'un échantillon, pour en déduire un âge ; il fera de nombreuses mesures, typiquement dans de nombreux grains extraits du même échantillon. Ainsi il obtiendra une distribution d'âges qu'il devra interpréter. Pourquoi tous ces âges ne sont-ils pas identiques ? De nombreux processus et facteurs sont responsables de l'évolution de la concentration d'un ou plusieurs isotopes dans un grain : la quantité et distribution initiale d'isotope parent, les propriétés diffusives du grain (existence d'imperfections dans la structure cristalline, défauts, etc.), le processus d'extraction des grains de la roche qui va briser les grains et biaiser la distribution isotopique si ces grains étaient zonés, etc. En théorie tous ces grains ont une même histoire de cristallisation ou de refroidissement, car ils se trouvaient à proximité (moins

de quelques cm) les uns des autres, et c'est ce que nous voulons contraindre. Il est donc raisonnable d'essayer d'analyser ces âges pour en extraire un âge de la roche dont les grains proviennent, c'est-à-dire un moment dans le passé géologique auquel la roche s'est cristallisée ou refroidie en deçà d'une température, appelée communément température de fermeture.

Pour illustrer les notions de base que nous allons introduire ici, nous utiliserons principalement une base de données thermochronologiques obtenues par la méthode des traces de fission (voir Tableau 7.1)

Table 7.1 – Données thermochronologiques (âges sont en Ma)

Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age
1	71	2	96	3	118	4	147	5	110
6	154	7	153	8	150	9	114	10	117
11	145	12	144	13	101	14	86	15	175
16	148	17	123	18	105	19	155	20	104
21	170	22	81	23	147	24	132	25	159
26	109	27	133	28	189	29	143	30	157
31	127	32	147	33	141	34	86	35	122
36	123	37	120	38	128	39	91	40	170
41	135	42	134	43	138	44	135	45	165
46	107	47	81	48	151	49	122	50	140
51	117	52	152	53	164	54	121	55	122
56	184	57	99	58	100	59	164	60	118
61	111	62	125	63	130	64	136	65	172
66	134	67	149	68	115	69	112	70	133
71	114	72	105	73	171	74	106	75	122
76	101	77	149	78	116	79	132	80	137
81	143	82	157	83	185	84	107	85	166
86	119	87	145	88	78	89	107	90	120
91	128	92	142	93	113	94	153	95	146
96	158	97	115	98	131	99	135	100	92

7.3 Moyenne, écart type

La moyenne d'une distribution de données est la grandeur la plus simple que l'on peut en extraire, et sans doute la plus utile. Dans le cas de la base de données thermochronologiques, cela nous donnera sans doute la meilleure valeur de l'âge de la roche que nous puissions extraire de ces données. La moyenne d'un ensemble de N données a_i pour $i = 1, \dots, N$ est simplement la somme des valeurs données divisée par le nombre de données. On la note \bar{a} :

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \quad (7.3.1)$$

La valeur moyenne de l'ensemble des âges est une bonne représentation de l'âge de la roche si nous pouvons supposer que les processus qui ont mené à la dispersion des âges (le fait qu'ils ne soient pas tous les mêmes) ont agi également pour les rendre plus élevés ou plus faibles que l'âge réel.

Pour que cette moyenne ait un sens, il faut que le nombre de données (ou d'échantillons) soit suffisamment grand. Ainsi, si nous mesurons la moyenne des n premiers âges, nous obtenons des valeurs différentes pour l'âge moyen comme illustré dans le Tableau 7.2. On remarque que si le nombre

Table 7.2 – Moyennes successives. n est le nombre d'échantillons utilisés pour calculer la moyenne

n	\bar{a}
5	108
10	123
20	126
50	130
100	130

d'échantillons est faible, la moyenne n'est pas nécessairement représentative de la valeur "réelle" de la grandeur mesurée. Lorsque le nombre d'échantillons augmente, cette valeur devient plus réaliste. Nous verrons plus tard combien d'échantillons nous devons prendre/mesurer pour que la valeur de la moyenne soit acceptable ou réaliste.

Une autre mesure de l'âge "typique" ou le plus réaliste que nous pouvons retirer de l'ensemble de mesures que nous avons prises est la valeur médiane. La valeur médiane est la valeur telle que la moitié des données ont une valeur inférieure (ou supérieure) à la médiane. Pour la mesurer, la façon la plus simple est d'ordonner les données en ordre d'âge croissant, comme illustré dans le Tableau 7.3. Sur 100 données, la médiane ou âge médian doit donc se trouver entre la valeur 50 et 51, c'est-à-dire 131.5 Ma. On voit que la valeur médiane n'est pas nécessairement égale à la valeur moyenne (130 Ma). Si la médiane est très différente de la moyenne, la distribution de données est sans doute biaisée (elle n'est pas "normale").

Une autre mesure très importante que nous pouvons faire facilement pour caractériser nos données est celle de la dispersion des données. On pourrait simplement prendre la différence entre la plus grande et la plus petite, mais cette mesure dépendrait de valeurs qui ne sont pas nécessairement représentatives de la vraie distribution (ou population) des données. Il est préférable de mesurer la "variance", notée σ^2 et définie comme suit :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2 \quad (7.3.2)$$

Notons que le carré est nécessaire car :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a}) = 0 \quad (7.3.3)$$

par définition de la valeur moyenne. La variance de notre échantillon (Tableau 7.1) est 643 Ma².

Table 7.3 – Données thermochronologiques en ordre croissant

Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age	Grain	Age
1	71	2	78	3	81	4	81	5	86
6	86	7	91	8	92	9	96	10	99
11	100	12	101	13	101	14	104	15	105
16	105	17	106	18	107	19	107	20	107
21	109	22	110	23	111	24	112	25	113
26	114	27	114	28	115	29	115	30	116
31	117	32	117	33	118	34	118	35	119
36	120	37	120	38	121	39	122	40	122
41	122	42	122	43	123	44	123	45	125
46	127	47	128	48	128	49	130	50	131
51	132	52	132	53	133	54	133	55	134
56	134	57	135	58	135	59	135	60	136
61	137	62	138	63	140	64	141	65	142
66	143	67	143	68	144	69	145	70	145
71	146	72	147	73	147	74	147	75	148
76	149	77	149	78	150	79	151	80	152
81	153	82	153	83	154	84	155	85	157
86	157	87	158	88	159	89	164	90	164
91	165	92	166	93	170	94	170	95	171
96	172	97	175	98	184	99	185	100	189

Rappelons cependant que l'échantillon que nous avons obtenu en mesurant l'âge d'une centaine de grains n'est qu'une représentation approximative de la vraie distribution que nous appellerons la "population" des âges. On peut montrer que la variance de l'échantillon est toujours plus faible que la variance de la population. Pour tenir compte de cet effet, on introduit la variance de la population, $\hat{\sigma}^2$, que l'on peut estimer par la formule suivante :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2 \quad (7.3.4)$$

Pour des valeurs élevées de N la différence entre σ^2 et $\hat{\sigma}^2$ s'amenuise et les deux grandeurs se confondent. Dans notre exemple, la variance de la population est 649 Ma².

Finalement, on appelle "écart type", $\hat{\sigma}$, la racine carrée de la variance de la population. Pour notre échantillon, l'écart type est 25.5 Ma. On peut montrer que 68% des âges mesurés devrait tomber à moins de 25.5 Ma de la valeur moyenne de 130 Ma, c'est-à-dire entre 104.5 et 155.5 Ma. Nous noterons ce résultat de la façon suivante :

$$a = 130 \pm 25.5 \text{ Ma} \quad (7.3.5)$$

7.4 Histogramme

Une façon très utile de représenter une distribution de données est d'en faire l'histogramme. Un histogramme est construit en rangeant les données dans des gammes consécutives de valeurs possibles des données. On dessine ensuite une série de colonnes correspondant chacune à une gamme de valeurs et dont la hauteur est proportionnelle au nombre d'échantillons (ou de données) dans la gamme. Ainsi nous avons construit l'histogramme suivant en rangeant les âges mesurés dans des gammes de largeur 20 Ma de 70 à 190 Ma (Figure 7.1).

7.5 Probabilité

Si nous divisons le nombre d'échantillons dans chaque gamme de valeurs par le nombre total d'échantillons, nous obtenons la probabilité qu'une mesure tombe dans cette gamme. L'histogramme résultant (Figure 7.2) est appelé l'histogramme de la distribution de la probabilité. Ainsi nous pouvons en déduire que la probabilité qu'une mesure tombe dans la gamme 100-120 Ma est de 25% et celle qu'une mesure tombe dans la gamme 180-200 Ma n'est que de 3%.

Cette distribution de probabilité peut être comparée à une distribution théorique, appelée "distribution de Gauss" ou "distribution normale" dont la formule est :

$$P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\hat{\sigma}^2}} \quad (7.5.1)$$

où $\hat{\sigma}$ est l'écart type et \bar{a} la moyenne de la distribution. $P(a)$ est appelée une "densité de probabilité" de telle sorte que la probabilité qu'une donnée/mesure soit comprise entre deux valeurs possibles est égale à l'intégrale de la fonction P entre ces deux valeurs.

En utilisant les valeurs de la moyenne et de l'écart type que nous avons estimées à partir des données thermochronologiques, nous pouvons construire la distribution théorique normale de ces âges

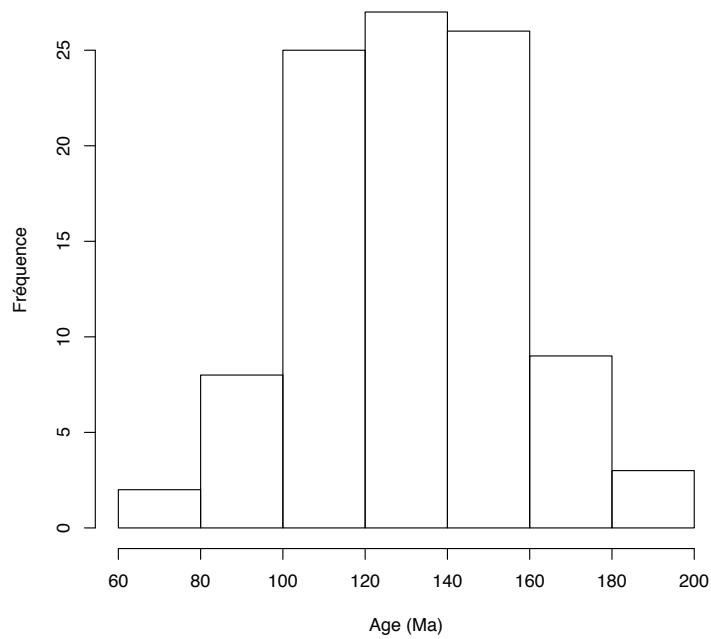


Figure 7.1 – Histogramme illustrant la distribution des âges donnés en Tableau 7.1.

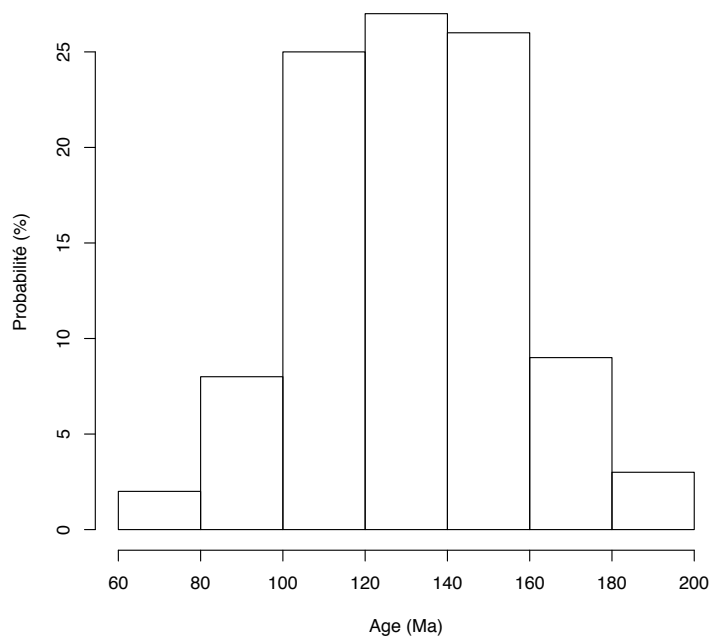


Figure 7.2 – Histogramme de la distribution de la probabilité des âges donnés en Tableau 7.1.

(Figure 7.3). Cette distribution est très proche de celle que nous avons esquissé dans l’histogramme de probabilité (Figure 7.2). Nous pouvons donc en conclure que notre distribution d’âges est sans doute très proche d’être normale.

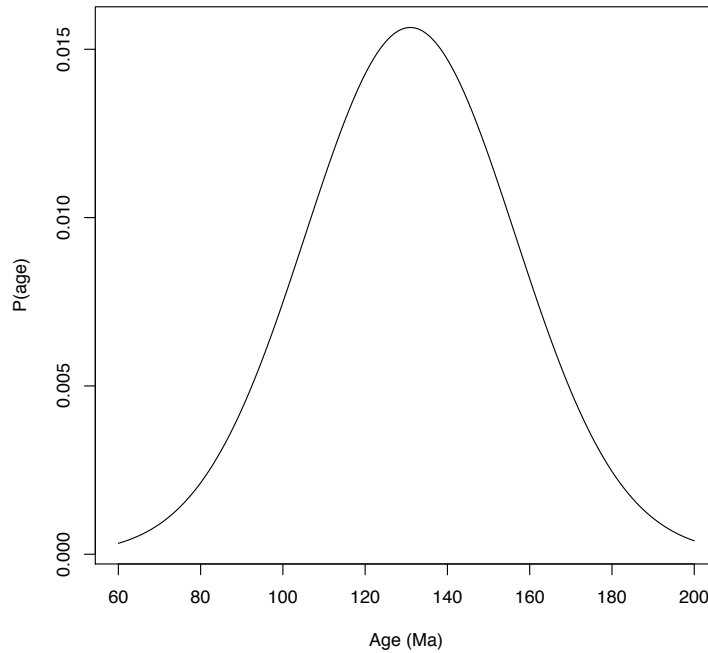


Figure 7.3 – Distribution normale obtenue à partir de la moyenne et de l’écart type estimés à partir des âges donnés en Tableau 7.1.

Finalement, la probabilité qu’une mesure tombe endéans un écart type de la moyenne est l’intégrale de la distribution entre la valeur moyenne moins l’écart type et la valeur moyenne plus l’écart type :

$$\int_{\bar{a}-\hat{\sigma}}^{\bar{a}+\hat{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\hat{\sigma}^2}} da = 0.683 \quad (7.5.2)$$

Notons cependant que cette intégrale n’est pas calculable analytiquement car la fonction e^{-x^2} n’a pas de primitive. Pour contourner ce problème, les mathématiciens ont défini cette intégrale comme étant une nouvelle fonction, appelée la fonction erreur :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (7.5.3)$$

et ses valeurs ont été calculées par des méthodes approximatives (numériques) et tablées (voir Abramowitz and Stegun, 1965). Dans le Tableau 7.4, nous donnons la valeur de cette fonction afin de faciliter le calcul de probabilités à partir de la distribution normale.

7.6 Régression linéaire

Un autre problème que rencontrera le géologue dans l’analyse de ses données est qu’il va mesurer deux grandeurs ou l’une en fonction d’une autre, comme, par exemple, la température dans un puits

Table 7.4 – Valeurs de la fonction $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$
0.000	0.000	0.025	0.028	0.050	0.056	0.075	0.084	0.100	0.112
0.125	0.140	0.150	0.168	0.175	0.195	0.200	0.223	0.225	0.250
0.250	0.276	0.275	0.303	0.300	0.329	0.325	0.354	0.350	0.379
0.375	0.404	0.400	0.428	0.425	0.452	0.450	0.475	0.475	0.498
0.500	0.520	0.525	0.542	0.550	0.563	0.575	0.584	0.600	0.604
0.625	0.623	0.650	0.642	0.675	0.660	0.700	0.678	0.725	0.695
0.750	0.711	0.775	0.727	0.800	0.742	0.825	0.757	0.850	0.771
0.875	0.784	0.900	0.797	0.925	0.809	0.950	0.821	0.975	0.832
1.000	0.843	1.025	0.853	1.050	0.862	1.075	0.872	1.100	0.880
1.125	0.888	1.150	0.896	1.175	0.903	1.200	0.910	1.225	0.917
1.250	0.923	1.275	0.929	1.300	0.934	1.325	0.939	1.350	0.944
1.375	0.948	1.400	0.952	1.425	0.956	1.450	0.960	1.475	0.963
1.500	0.966	1.525	0.969	1.550	0.972	1.575	0.974	1.600	0.976
1.625	0.978	1.650	0.980	1.675	0.982	1.700	0.984	1.725	0.985
1.750	0.987	1.775	0.988	1.800	0.989	1.825	0.990	1.850	0.991
1.875	0.992	1.900	0.993	1.925	0.994	1.950	0.994	1.975	0.995
2.000	0.995	2.025	0.996	2.050	0.996	2.075	0.997	2.100	0.997
2.125	0.997	2.150	0.998	2.175	0.998	2.200	0.998	2.225	0.998
2.250	0.999	2.275	0.999	2.300	0.999	2.325	0.999	2.350	0.999
2.375	0.999	2.400	0.999	2.425	0.999	2.450	0.999	2.475	1.000
2.500	1.000								

de forage, en fonction de la profondeur dans le puits, et il voudra savoir si il existe une relation linéaire simple entre ces deux grandeurs.

Pour illustrer le problème (et sa solution) considérons des données de température obtenues dans un puits de 1000 m de profondeur dans le sud de l’Australie (Tableau 7.5).

Table 7.5 – Données température-profondeur

Profondeur (m)	Température (°C)
77	27
134	10
191	25
250	24
282	31
348	23
394	29
441	42
473	35
522	39
581	35
628	40
657	41
699	31
782	40
819	42
856	43
896	46
964	41
990	58

On peut montrer que la meilleure droite qui passe par ces points (d_i, T_i) pour $i = 1, \dots, N$ a pour équation :

$$T = ad + b \tag{7.6.1}$$

où

$$a = \frac{N \sum d_i T_i - \sum d_i \sum T_i}{N \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2} \tag{7.6.2}$$

et

$$b = \frac{1}{N} \sum T_i - a \frac{1}{N} \sum d_i = \bar{T} - a \bar{d} \tag{7.6.3}$$

Par “meilleure” droite, on signifie qu’il s’agit de la droite dont la somme des carrés des différences entre les valeurs observées et celles prédites par cette “régression” est minimale. On parle aussi d’une approximation des données par une droite au sens des “moindres carrés”.

L'application de cette méthode aux mesures de températures données dans le Tableau 7.5 donne une valeur de $31^\circ\text{C}/\text{km}$ pour la pente et de 18.7 pour l'intersection avec l'axe des températures, qui correspond évidemment à la température à la surface. Les données et la régression linéaire correspondante sont illustrées dans la Figure 7.4.

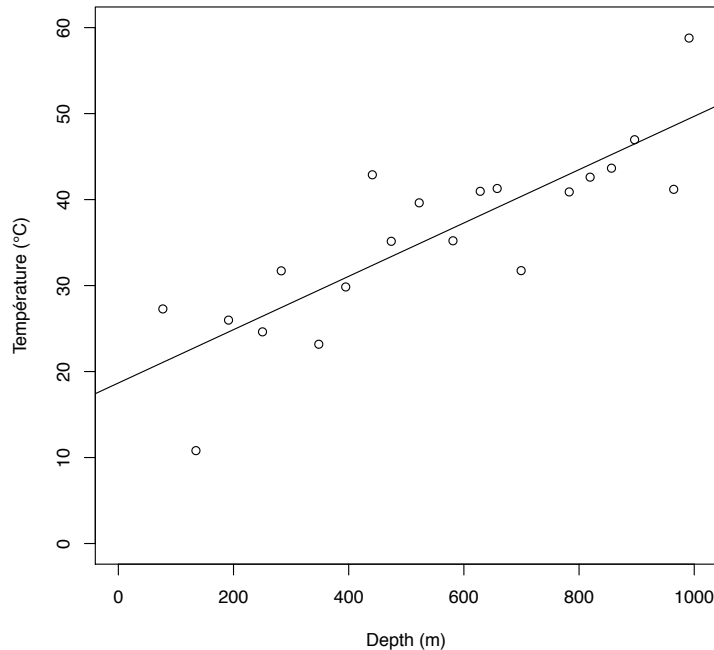


Figure 7.4 – Données de température en fonction de la profondeur dans le puits et régression linéaire correspondante donnant une pente (géotherme de surface) de $31^\circ\text{C}/\text{km}$ et une température à la surface de 18.7°C .

Finalement, on peut mesurer la qualité de la régression linéaire en calculant le coefficient de corrélation linéaire, r :

$$r = \frac{\sum((d_i - \bar{d})(T_i - \bar{T}))}{\sqrt{\sum(d_i - \bar{d})^2} \sqrt{\sum(T_i - \bar{T})^2}} \quad (7.6.4)$$

Ce coefficient varie entre -1 et 1. Lorsqu'il est proche de 1, c'est qu'il existe une relation linéaire positive entre d_i et T_i ; lorsqu'il est proche de -1, c'est qu'il existe une relation linéaire négative entre d_i et T_i (ou une "anti-correlation"). Lorsque r s'approche de 0, la régression linéaire n'a pas de sens car il n'y a pas de relation entre d_i et T_i . Notons que la qualité de la régression linéaire est souvent donnée par la valeur de r^2 .

7.7 Propagation de l'erreur

Nous avons vu qu'à toute mesure géologique est associée une incertitude que nous appelons parfois "erreur"¹. Nous omettons souvent de la donner mais c'est une très mauvaise habitude. Considérons une

1. Cette erreur a plusieurs causes; elle peut être due à la précision de notre instrument de mesure (on ne peut mesurer des longueurs avec un règle en bois avec une précision meilleure que le millimètre) mais aussi à la variabilité inhérente

série de mesures d'une grandeur géologique qui nous permettent d'en déterminer la meilleure valeur possible, la moyenne par exemple, et l'incertitude attachée à cette valeur, l'écart type par exemple. Notons cette valeur et son incertitude a et Δa . Supposons maintenant que nous avons mesuré plusieurs de ces grandeurs, a_i et Δa_i , et que nous devons maintenant les combiner pour obtenir la valeur d'une autre grandeur géologique. Par exemple, nous avons mesuré le gradient géothermique et la conductivité et nous les multiplions pour obtenir le flux de chaleur conductif. La question qui se pose est la suivante : connaissant les incertitudes sur nos mesures de gradient géothermique et de conductivité, que pouvons nous dire de l'incertitude sur le flux de chaleur ? Devons-nous simplement multiplier les incertitudes entre elles, comme nous multiplions le gradient géothermique par la conductivité pour obtenir le flux de chaleur ?

La réponse à cette question est la suivante : étant donné des grandeurs mesurées ou observées, a_i , et les erreurs associées à chacune de ces grandeurs, Δa_i , l'incertitude associée à toute fonction ou combinaison de ces grandeurs $f(a_i)$ est donnée par :

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}(a_i)\right)^2 \Delta a_i^2} \quad (7.7.1)$$

Appliquons cette formule au problème de flux de chaleur : $\phi = kG$ où ϕ est le flux de chaleur, G le gradient géothermique et k la conductivité. Nous obtenons :

$$\Delta \phi = \sqrt{k^2 \Delta G^2 + G^2 \Delta k^2} \quad (7.7.2)$$

Prenons les valeurs suivantes pour le gradient géothermique, $G = 25 \pm 5$ °C/km, et la conductivité, $k = 3.2 \pm 0.7$ W/m/°C. Et nous obtenons pour le flux de chaleur : 80 ± 24 mW/m². Alors que si nous avons simplement utilisé le produit des incertitudes pour obtenir l'incertitude sur le flux de chaleur, nous aurions obtenu : 80 ± 3.5 mW/m² et nous aurions complètement sous-estimé l'incertitude sur le flux de chaleur.

Qu'exprime cette formule ? Que l'erreur attachée à une grandeur se propage d'autant plus dans la fonction que la fonction dépend de cette grandeur (c'est-à-dire si la dérivée de la fonction par rapport à la grandeur est importante).

7.8 Points importants à retenir

1. Qu'est-ce que la moyenne, l'écart type et la variance et à quoi servent-ils ?
2. Comprendre et retenir la différence entre un échantillon et une population
3. Savoir construire et interpréter un histogramme à partir d'un échantillon
4. Comprendre la notion de probabilité et de densité de probabilité
5. Utiliser la distribution de Gauss pour déterminer la probabilité qu'une mesure d'une grandeur naturelle tombe entre deux valeurs données
6. Savoir calculer la pente et la valeur à l'origine de la droite épousant le mieux des observations de type $x - y$ (bi-variées)

aux grandeurs que nous voulons mesurer (voir le chapitre ci-dessus)

7. Savoir calculer un coefficient de corrélation
8. Savoir propager l'erreur associée à la mesure de grandeurs pour estimer l'erreur d'une autre grandeur calculée à partir des grandeurs mesurées

7.9 Travaux dirigés

Exercice 53

Le Tableau 7.6 reprend une série de mesures d'angles représentant le pendage d'une faille à plusieurs endroits le long de sa trace. En déduire la valeur moyenne de ce pendage, l'écart type et montrer à partir d'un histogramme que cette distribution de mesures est normale (gaussienne). En déduire la probabilité qu'une mesure de pendage se trouve entre les valeurs 65 et 70°.

Table 7.6 – Angles mesurés

#	Angle	#	Angle	#	Angle	#	Angle	#	Angle
1	37	2	47	3	56	4	68	5	53
6	71	7	70	8	69	9	54	10	56
11	67	12	67	13	49	14	43	15	79
16	68	17	58	18	51	19	71	20	50
21	77	22	41	23	68	24	62	25	73
26	52	27	62	28	85	29	66	30	72

Exercice 54

Une série d'analyses U/Pb ponctuelles (spot) sur un zircon ont donné les âges suivants (Tableau 7.7). En déduire l'âge moyen du grain, et son écart type. Déterminer si la distribution d'âges est normale. Si elle l'est déterminer la probabilité qu'un âge mesuré diffère de moins de 10 Ma de l'âge moyen.

Table 7.7 – Ages U/Pb mesurés

#	Age	#	Age	#	Age	#	Age	#	Age
1	241.2	2	251.3	3	260.6	4	272.2	5	257.3
6	275.2	7	274.6	8	273.4	9	258.9	10	260.1
11	271.3	12	271.3	13	253.4	14	247.6	15	283.7
16	272.7	17	262.4	18	255.2	19	275.7	20	254.9

Exercice 55

Existe-t-il une relation linéaire entre la pression de dioxyde de carbone dissout dans le Mékong et sa composition isotopique ($\delta^{13}\text{C}$). Pour répondre à cette question, considérer les données fournies dans le Tableau 7.8. Peut-on prédire la composition isotopique ($\delta^{13}\text{C}$) d'une eau de $\text{pCO}_2 = 10^{-2.1}$ atm.

Exercice 56

On veut estimer le volume d'un pluton que l'on va supposer être sphérique. Sur une ligne sismique on

Table 7.8 – Données géochimiques provenant du fleuve Mékong.

Log pCO ₂ (atm)	$\delta^{13}\text{C}_{\text{CO}_2}$ (‰)
-3.13	-10.26
-2.99	-11.83
-2.86	-10.24
-2.71	-10.30
-2.82	-9.51
-2.60	-10.29
-2.57	-9.54
-2.55	-8.16
-2.66	-8.86
-2.61	-8.33
-2.46	-8.70
-2.42	-8.04
-2.56	-7.93
-2.58	-8.81
-2.19	-7.82
-2.26	-7.57
-2.33	-7.39
-2.36	-6.98
-2.12	-7.48
-2.29	-5.64

estime que son rayon est de l'ordre de 720 ± 50 m. Quelle est le volume du pluton et l'erreur associée ?

Exercice 57

On a estimé qu'un puits de forage fait un angle de $30 \pm 10^\circ$ avec la verticale. La longueur de la carotte a été de 300 ± 10 m. Quelle est la profondeur atteinte et quelle est l'erreur associée à cette estimation ?

Problèmes Intégrateurs

8.1 Objectifs

- Utiliser des notions de différentes branches des mathématiques pour résoudre des problèmes géologiques
- Choisir l’outil pour répondre à un problème unitaire
- Combiner les différents outils pour répondre à un problème complexe
- Réfléchir à de nouveaux problèmes géologiques en se positionnant dans un contexte quantitatif

8.2 Introduction

Nous allons maintenant supposer que toutes les notions vues dans ce cours sont acquises, c’est-à-dire que les outils sont connus et peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes simples dans chacun des domaines concernés : les systèmes d’équations linéaires, l’analyse des fonction, l’établissement et la solution d’équations différentielles simples, la géométrie et la trigonométrie, l’utilisation des matrices et la statistique. Dans sa vie professionnelle, un géologue va faire face à des problèmes lui demandant d’utiliser ces outils mathématiques ; pour chaque problème, il lui faudra trouver le ou les outils à utiliser. Nous allons donc essayer de nous entraîner à trouver la ou les méthodes à utiliser en réalisant une série de problèmes dits “intégrateurs”, c’est-à-dire qu’ils ne sont pas posés en termes de l’outil mathématique et qu’ils font appel souvent à plus d’une méthode ou notion.

8.3 Approche

L’approche est de repérer dans le problème ce qui nous permettra de décider quelle méthode/outil utiliser. Avant de vous lancer dans les détails de la résolution d’un problème, il est essentiel de déterminer la marche à suivre en accomplissant la démarche de manière conceptuelle, c’est-à-dire en écrivant sous forme symbolique (avec des équations faisant intervenir des symboles qui vous sont soit donnés dans l’énoncé ou que vous aurez introduits vous-mêmes) la ou les équations à utiliser et en détaillant la façon dont vous allez arriver à la réponse à la question.

8.3.1 Systèmes d'équations linéaires

Un relation linéaire comprend une, deux, voire trois variables indépendantes. Cette relation ne comprend que des multiplications et des additions de constantes et de variables qui ne se multiplient pas entre elles. Elle prendra l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} ax &= b \\ ax + by &= c \\ ax + by + cz &= d \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Rappelons que de telles équations sont représentées par un point, une droite ou un plan dans des espaces de dimension 1, 2 ou 3, c'est-à-dire faisant intervenir une, deux ou trois inconnues.

8.3.2 Calcul matriciel

Ces relations linéaires, si elles sont au moins au nombre de deux, peuvent mener à la résolution d'un système d'équations linéaires que l'on met alors sous la forme d'une équation matricielle. Il faut alors en calculer le déterminant pour savoir si la solution existe et, si nécessaire ou faisable, en calculer la solution par élimination de Gauss ou en calculant l'inverse de la matrice.

A noter que les matrices nous permettent également de représenter des tenseurs tels que le tenseur des contraintes, qui sont très généralement utilisés en géologie, et surtout en géologie structurale. On devra pouvoir exprimer ces tenseurs dans des systèmes de référence quelconques, en calculer les valeurs propres et les vecteurs propres, afin de déterminer les directions principales du tenseurs des tensions (σ_1 , par exemple).

8.3.3 Analyse fonctionnelle

Une fonction n'est jamais que la relation liant une grandeur à une autre ; elle exprime la variation d'une grandeur par rapport à une variable. La seule contrainte sur cette fonction, c'est qu'à chaque valeur de la variable ne corresponde qu'une seule valeur de la fonction. Si la question fait référence à la variation d'une grandeur et à la vitesse à laquelle cette variation a lieu, il faut penser à utiliser la dérivée qui n'est autre qu'une mesure de cette vitesse. Si la question fait référence à une somme de valeur sur une longueur, un temps fini ou sur une surface ou dans un volume, il faut alors penser à utiliser la notion d'intégrale qui n'est autre qu'une somme infinie, c'est-à-dire qu'elle implique la somme d'éléments infiniment petits d'intervalles de variation de la fonction.

8.3.4 Equations différentielles

Nous avons vu deux types d'équations différentielles, celles décrivant les processus de croissance ou de décroissance et celles décrivant les phénomènes de transport. Il faut bien comprendre comment on les construit et comment on les résout. Cette dernière partie fera appel à des notions d'analyse fonctionnelle, de dérivée et d'intégrale. Ne pas oublier d'imposer une condition initiale et des conditions aux limites (ou frontières).

8.3.5 Géométrie et trigonométrie

C'est sans doute la partie du cours la plus simple à "reconnaître". On y parle de triangles, d'angles, de directions, de plans, etc. Si on ne parle que d'angle ou de distance, il faut se demander si la question ne se résume pas à trouver un triangle dans lequel on appliquera les différentes règles reliant angles et longueurs dans un triangle, et surtout dans un triangle rectangle. Ceci mènera à parler de sinus et de cosinus. N'hésitez pas à dessiner le cercle unitaire vous donnant la définition du sinus et du cosinus d'un angle. Attention que ces grandeurs sont également des fonctions et que la question pourrait mener à utiliser des notions de dérivée et d'intégrale. SI vous voyez que la question implique des mesures à la surface de la terre et que vous devez tenir compte de la sphéricité de la Terre, il faut alors utiliser les notions de géométrie sphérique.

Finalement, si vous voyez apparaître des questions demandant de calculer la position d'un objet ou l'orientation d'une direction ou d'un plan, il est fort probable que vous aurez besoin d'utiliser des notions de géométrie analytique.

8.4 Points importants à retenir

1. Chercher les mots clés dans l'énoncé de la question qui permettront de déterminer les outils successifs à utiliser
2. Toujours commencer par une résolution schématique du problème pour déterminer si le choix des outils mènera à la solution du problème
3. Réaliser un ou des diagrammes simples, surtout si la question fait intervenir des notions de géométries ou d'analyse fonctionnelle

8.5 Travaux Dirigés

Exercice 58

Deux failles, l'une verticale et d'azimut nord, l'autre de pendage 30° et d'azimut 25° se rencontrent à la surface en un point donné. Par rapport à ce point, calculez les coordonnées (x, y) de l'endroit où un forage devrait être réalisé pour atteindre un piège stratigraphique formé par la rencontre de ces deux failles et du sommet d'un réflecteur horizontal (un niveau d'argile) dont on a estimé la profondeur à 1500m. Cet exercice est à réaliser en utilisant des notions de géométrie analytique.

Exercice 59

On mesure le nombre d'arbres qui meurt chaque jour, C dans une forêt du nord canadien. Voici le résultat de ces mesures :

jour	$\ln(C)$
1	5.1
2	5.8
3	6.4
4	6.6
5	7.1

- Déterminez, statistiquement la loi la plus simple reliant le logarithme du nombre d'arbres morts par jour ($\ln(C)$) au temps (t) (mesuré en jours).
- En déduire la fonction décrivant le nombre d'arbres morts par jour (C) en fonction du temps (t).
- En déduire une loi d'évolution du nombre total d'arbres morts (N) en fonction du temps (t).
- Quelle est l'équation différentielle contrôlant l'évolution temporelle de cette quantité ?
- Dans une forêt voisine, on possédait déjà 1000 arbres sains et on décide d'en planter à une vitesse de $P_0 = 1000$ par jour. Itérativement, déterminez quand le nombre d'arbres plantés sera égal au nombre d'arbres morts. Commencez votre recherche itérative en supposant que cela prend 20 jours.

Exercice 60

Un volcanologue essaie de mesurer le taux de solidification d'un écoulement de lave à proximité d'un volcan. Pour cela il va suivre la position d'un morceau de roche transporté dans un écoulement. La coulée de lave est linéaire (en ligne droite) et perpendiculaire à la ligne de vue entre le volcanologue et le point de départ de la roche qui se trouve à une distance de sécurité de 150 m. Le volcanologue va mesurer l'angle que fait la roche avec cette ligne de vue initiale en fonction du temps. Il obtient les mesures suivantes :

- Quelle est la relation existant entre la vitesse angulaire (c'est-à-dire la vitesse de changement de l'angle $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$) et la vitesse linéaire de la roche (v), c'est-à-dire le long de l'écoulement.

t (en s)	α (en degrés)
0	0
105	$33^{\circ}7$
196	$50^{\circ}2$
301	$58^{\circ}0$
380	$61^{\circ}8$
490	$63^{\circ}4$
605	$63^{\circ}4$

- Utiliser les données ci-dessus pour en déduire une valeur approchée de la vitesse angulaire (en radians par seconde) en fonction du temps, c'est-à-dire aux temps t auxquels les mesures ont été faites.
- En déduire une valeur approchée de la vitesse linéaire de la roche en fonction du temps.
- En déduire une valeur approchée de l'accélération de la roche en fonction du temps.

Exercice 61

La composante diurne de la marée est la plus importante à Sydney (Bondi Beach) le 7 juillet ; l'amplitude de la marée est de 0,5m ; la marée est haute à 8h30.

- La plage fait une pente (vers l'océan) de $2^{\circ}5$. Quelle est la différence de largeur de la plage entre marée haute et marée basse ?
- Quand le niveau de la mer augmente-t-il le plus vite ce jour-là ?
- En position de marée basse, comment varie le flux d'eau au long de la journée ?
- Quelle est l'équation différentielle gouvernant le mouvement périodique des marées ?
- Les tours des maîtres-nageurs sont espacées de 100m les une des autres. On leur demande de positionner des bouées pour le filet anti-requin tous les 100m à une distance de 250m des tours. Ils disposent de deux théodolites. Comment vont-ils guider leurs collègues chargés de positionner les bouées ?
- Vous décidez de mesurer la hauteur de l'eau toutes les deux heures. Quelle est la valeur moyenne et l'écart-type de vos mesures ?

Chapitre 10

Annales

10.1 Partiel S4 2011 - MAT248 - 23 Mars 2011

Documents et calculatrice autorisés. Répondre aux 4 questions. Durée de l'examen partiel : 2 heures.

10.1.1 Question 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad (10.1.1)$$

Solution :

Le premier système n'a soit pas de solution ou une infinité de solutions car il est composé de seulement trois équations pour 4 inconnues. Il suffit d'essayer de le résoudre pour savoir laquelle des deux possibilités s'applique ici. On peut simplifier le système en remplaçant la deuxième équation par la première moins la deuxième :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_3 \\ x_4 &= -2x_2 + 2x_3 - 1 = 4x_3 + 2x_3 - 1 = 6x_3 - 1 \\ x_1 &= 2 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 - 2x_3 - x_3 - 6x_3 + 1 = 2 - 9x_3 \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Les solutions de ce système d'équations sont donc de la forme :

$$(x_1 = 2 - 9x_3, x_2 = -2x_3, x_3, x_4 = 6x_3 - 1) \quad (10.1.4)$$

Le second système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (10.1.5)$$

et, puisque le déterminant de la matrice est $-8 + 48 - 1 - 32 - 4 - 3 = 0$, le système n'a soit pas de solution, soit une infinité de solutions. Notons que si les équations représentaient des plans dans un espace à trois dimensions, que le système n'ai pas de solution ou une infinité correspond à la situation où au moins deux des plans sont parallèles entre eux. Si ils sont disjoints, alors il n'y aura pas de solution ; si ils sont confondus, il y aura une infinité de points solutions du système, correspondant à tous les points sur la droite d'intersection du troisième plan et des deux plans confondus.

Pour répondre à la question, nous allons de nouveau essayer de trouver une solution au système, en soustrayant les deux premières équations l'une de l'autre et en soustrayant 8 fois la seconde de la troisième. Cela donne :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -11x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -33x_2 + 15x_3 &= 3 \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

finalement en soustrayant un tiers de la troisième de la deuxième, on trouve $0=0$. Cela signifie qu'il existe une infinité de solutions. Celles-ci s'expriment sous la forme :

$$(x_1 = 4 + 2x_3, x_2 = -1 + 5x_3, x_3) \quad (10.1.7)$$

et correspondent à la droite d'intersection des deux plans.

10.1.2 Question 2

Calculer la dérivée première et seconde par rapport à la variable x des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{e^x} \\ f(x) &= \arctan \sqrt{x} \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

Solution :

Il suffit d'abord de voir que :

$$\sqrt{e^x} = e^{x/2} \quad (10.1.9)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{x/2} &= \frac{1}{2} \sqrt{e^x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x/2} &= \frac{1}{4} \sqrt{e^x} \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

Pour l'autre fonction, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \sqrt{x} &= \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \arctan \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \frac{-1}{x(1+x)^2} \left(\sqrt{x} + \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}(1+x)^2} \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

10.1.3 Question 3

La quantité de chaleur, ϕ , reçue par jour sur la Terre en provenance du soleil varie comme la fonction suivante, où le temps t est compté en jours à partir du 1er janvier :

$$\phi(t) = \phi_R - \phi_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{10.1.12}$$

où ϕ_R et ϕ_0 sont des constantes ayant les mêmes unités que ϕ , en Joules/jours. T est la longueur de l'année en jours.

1. Dériver l'expression nous donnant la quantité de chaleur reçue en 1 an.
2. Dériver l'expression nous donnant la quantité de chaleur reçue durant la période de trois mois suivant le premier janvier (janvier, février et mars = $T/4$).
3. Trouver le moment de l'année où la quantité de chaleur augmente le plus rapidement, d'abord graphiquement, ensuite en calculant les dérivées de la fonction ci-dessus (Eq. 10.1.12).

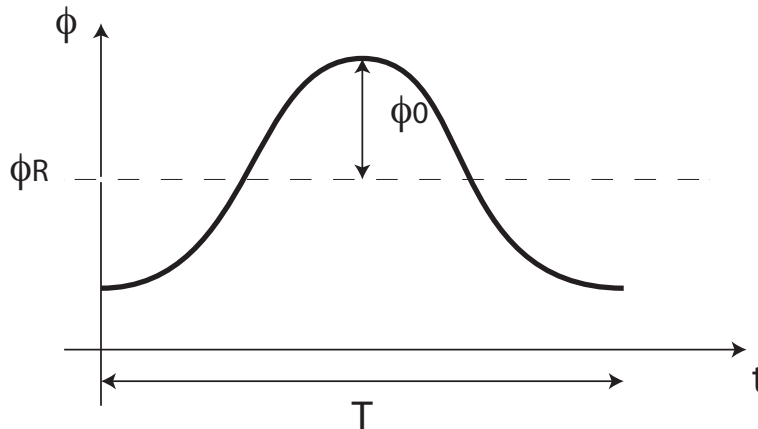
Solution : La quantité de chaleur reçue en un an est l'intégrale de la quantité de chaleur reçue par jour depuis 0 jusque T la longueur de l'année en jours :

$$\int_0^T (\phi_R - \phi_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})) dt = \phi_R T \tag{10.1.13}$$

Sur la période des trois premiers mois de l'année, cela donne :

$$\int_0^{T/4} (\phi_R - \phi_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})) dt = \phi_R \frac{T}{4} - \phi_0 \frac{T}{2\pi} [\sin(\frac{2\pi t}{T})]_0^{T/4} = \phi_R \frac{T}{4} - \phi_0 \frac{T}{2\pi} \tag{10.1.14}$$

Graphiquement, la fonction ayant la forme suivante :



sa croissance est maximale en $T/4$, donc à la fin du mois de mars. On peut également obtenir ce résultat en calculant les trois premières dérivées de la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_R - \phi_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})) &= \phi_0 \frac{2\pi}{T} \sin(\frac{2\pi t}{T}) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi_R - \phi_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})) &= \phi_0 \frac{4\pi^2}{T^2} \cos(\frac{2\pi t}{T}) \\ \frac{\partial^3}{\partial t^3} (\phi_R - \phi_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})) &= -\phi_0 \frac{8\pi^3}{T^3} \sin(\frac{2\pi t}{T}) \end{aligned} \tag{10.1.15}$$

pour montrer que la dérivée est maximale là où la dérivée seconde s'annule et où la dérivée troisième est négative, donc en $t = T/4$.

10.1.4 Question 4

Mettre l'équation différentielle suivante sous sa forme sans dimension (adimensionnée) en utilisant les conditions aux limites. En déduire la valeur d'un temps caractéristique, τ , et d'un nombre sans dimension nous indiquant dans quelles conditions le terme en $-PF$ est important. P et k sont des constantes. F_0 est la valeur de la solution, $F(x)$, en $x = H$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= -PF + k \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ F(x=0) &= 0 \\ F(x=H) &= F_0\end{aligned}\tag{10.1.16}$$

Pour un petit point supplémentaire, donner les unités de k et P . Solution : En utilisant les variables sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned}F' &= F/F_0 \\ x' &= x/H \\ t' &= t/\tau\end{aligned}\tag{10.1.17}$$

nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{F_0}{\tau^2} \frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2} = -PF_0 F' + \frac{kF_0}{H^2} \frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}\tag{10.1.18}$$

et en prenant la valeur suivante pour τ :

$$\tau = \sqrt{\frac{H^2}{k}}\tag{10.1.19}$$

en simplifiant tous les termes par F_0 et en divisant l'équation par τ , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2} = -\frac{PH^2}{k} F' + \frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}\tag{10.1.20}$$

Nous pouvons alors introduire un nombre sans dimension :

$$P' = \frac{PH^2}{k}\tag{10.1.21}$$

pour écrire l'équation sous sa forme sans dimension :

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial t'^2} = -P' F' + \frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2}\tag{10.1.22}$$

La valeur de ce nombre sans dimension, P' , détermine si le terme de production est important. Si $P' > 1$, il l'est, sinon, il ne l'est pas.

Finalement, nous voyons que les unités de k sont des m^2/s^2 et celles de P sont des $1/\text{s}^2$.

10.2 Examen Première Session - Mai 2011

L'équation de conservation de la chaleur dans la croûte supérieure s'écrit de la façon suivante :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \rho H$$

où T est la température, ρ est la densité, c est la chaleur spécifique, v la vitesse d'avection des roches vers la surface, k la conductivité, H la production de chaleur par les éléments radioactifs et z et t , la dimension verticale et le temps, respectivement.

1. Simplifiez cette équation en négligeant le terme de production de chaleur et en supposant que le système que vous étudiez a atteint l'équilibre. Donnez cette équation simplifiée.
2. Adimensionnez l'équation simplifiée en tenant compte des conditions aux limites suivantes :

$$T(z = 0) = 0 \quad \text{et} \quad T(z = L) = T_L$$

3. Montrez que l'expression suivante est solution de cette équation adimensionnée :

$$T'(z') = \left(\frac{1 - e^{-\mathbf{Pe} z'}}{1 - e^{-\mathbf{Pe}}} \right) \quad (10.2.1)$$

et satisfaisant aux conditions aux limites données ci-dessus. N'oubliez pas d'indiquer ce que signifient z' , T' et \mathbf{Pe} (exprimez \mathbf{Pe} en fonction des constantes physiques et paramètres de l'équation initiale).

4. Un thermochronologue voudrait connaître la profondeur à laquelle une certaine température est atteinte ; pour cela il doit inverser l'expression précédente, c'est-à-dire trouver une expression de la profondeur en fonction de la température : $z' = z'(T')$. Donnez-lui cette expression.
5. Montrez que l'expression du gradient géothermique (adimensionné), G' , à la surface ($z' = 0$) en fonction de \mathbf{Pe} est donné par :

$$G' = \frac{\mathbf{Pe}}{1 - e^{-\mathbf{Pe}}}$$

6. Vers quelle valeur tend ce gradient pour des valeurs de \mathbf{Pe} très grandes ($\mathbf{Pe} \rightarrow \infty$) et très petites ($\mathbf{Pe} \rightarrow 0$) ?
7. Un pétrologue a obtenu la relation suivante donnant la température à laquelle les roches atteignent leur point de fusion partielle :

$$T'(z') = \alpha z' + \beta$$

En supposant que $\mathbf{Pe} = 2$, $\alpha = -3$ et $\beta = 2$, déterminez la profondeur normalisée z' à laquelle les roches atteignent leur point de fusion si le géotherme est donné par l'expression ci-dessus (eq.10.2.1). Pour y parvenir, utilisez une méthode graphique et puis une méthode itérative.

8. Le tableau suivant donne une série de mesures du flux de chaleur conductif à la surface d'une chaîne de montagnes (en mW/m²) :

88, 84, 88, 88, 98, 83, 88, 86, 81, 91, 96, 91, 91, 91, 93, 95, 93, 91, 86, 91

- a. Montrez graphiquement que cette distribution est proche d'être normale.
- b. Calculez en la moyenne et l'écart type
- c. Quelle est la probabilité qu'une mesure soit comprise entre 85 et 96 mW/m²

10.3 Partiel Novembre 2011

10.3.1 Exercice 1

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & + 4x_3 & = & 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 & = & 8 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & 3 \end{cases}$$

10.3.2 Exercice 2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\text{tr}(A)$, $\det(A)$.
2. Dire si A est inversible et, si c'est le cas, calculer son inverse A^{-1} .

10.3.3 Exercice 3

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^T et BB^T .
2. Déterminer les valeurs propres de B et des vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

10.3.4 Exercice 4

Des mesures de débit (en m^3/s) de la Seine à Paris faites sur une journée vous sont données dans le diagramme suivant. Trouvez une fonction qui pourrait représenter cette variation en fonction du temps. En calculant les dérivées successives de cette fonction, en déduire le moment où le débit est maximal, minimal et quand il diminue le plus rapidement sur ce cycle d'une journée. Calculez le volume total d'eau transportée par la Seine entre 9h et 17h.

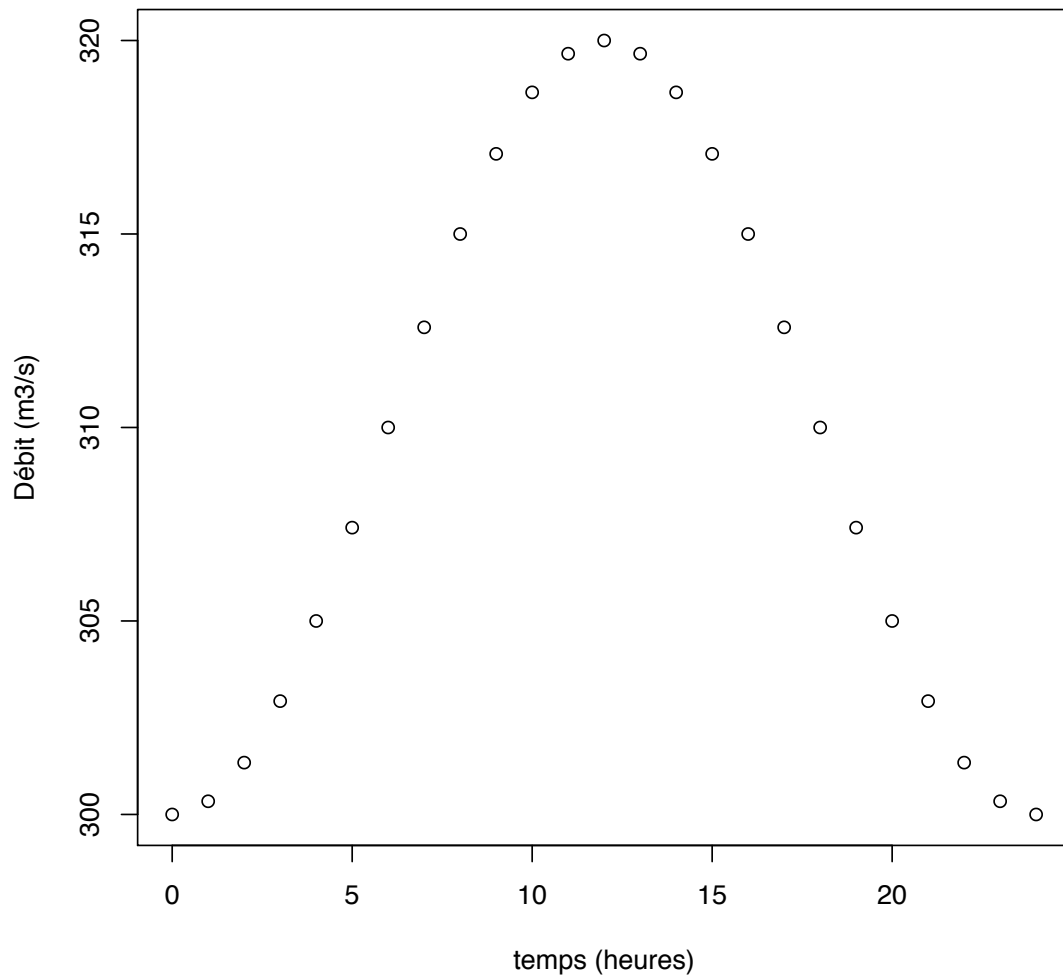


Figure 10.1 – Débit de la Seine à Paris.

Chapitre 11

Questionnaire

(A présenter aux étudiants en début d'année pour mesurer leur niveau de connaissances et leur motivation.)

NOM :

PRENOM :

GROUPE :

11.1 Parcours

Décrivez votre parcours (formation) depuis le Lycée :

1. Bac (type et résultat) :
2. Année 1 à la Fac/prépa (type et résultat) :
3. Année 2 à la Fac/prépa (type et résultat) :
4. Année 3 à la Fac/prépa (type et résultat) :

11.2 Auto-évaluation

Par rapport aux connaissances et à l'utilisation des mathématiques attendues à ce niveau de mes études universitaires, je trouve que mes aptitudes sont :

très mauvaises [] à améliorer [] adéquates [] supérieures [] hors du commun []

11.3 Questions

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x - 4y &= 5 \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

2. Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (11.3.2)$$

3. Calculez la dérivée de la fonction :

$$\frac{1}{\sin x} \quad (11.3.3)$$

4. Calculez l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx \quad (11.3.4)$$

5. Calculez la distance entre les deux points de coordonnées :

$$(0, 1.5, -1.2) \quad \text{et} \quad (-2.1, 3.1, 1.2) \quad (11.3.5)$$

6. Quelle est la fonction ; $f(y)$, solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f \quad (11.3.6)$$

7. Calculez la moyenne, la variance et l'écart type de l'ensemble de mesures/nombres suivants

$$12.3 \quad 9.3 \quad 11.8 \quad 10.1 \quad (11.3.7)$$

Table des figures

2.1	Deux relation linéaires entre température et profondeur. L'une représente le géotherme continentale (variation de la température en fonction de la profondeur dans la croûte continentale ; l'autre représente la variation du point de fusion des roches en fonction de la profondeur.	9
2.2	Schéma représentant le produit d'une matrice par un vecteur. Les opérations successives de multiplication d'une ligne de la matrice par le vecteur pour donner les colonnes successives du vecteur résultat sont décrites.	12
3.1	Exemple de fonction linéaire : variation de la température près de la surface de la Terre.	20
3.2	Instrument utilisés pour mesurer le flux de chaleur provenant de l'intérieur de la Terre dans les sédiments océaniques	21
3.3	Le géotherme continental, fonction quadratique de la profondeur, représentation des mathématiciens et celle des géologues.	22
3.4	Fonctions linéaires dont les paramètres G et T_S ont des valeurs différentes. G , le gradient géothermique nous renseigne sur la façon dont varie la fonction.	23
3.5	La dérivée n'est rien d'autre que la pente de la fonction à une échelle ϵ suffisamment petite pour que la fonction y apparaisse linéaire.	24
3.6	La fonction topographie ou variation de la hauteur de la surface de la Terre en fonction de la distance horizontale. On remarque que la pente de cette fonction varie avec x . On peut alors en étudier la variation, que l'on appellera la courbure ou dérivée seconde de la topographie.	26
3.7	Graphiques des fonctions constante, linéaire, quadratique, inverse, exponentielle et logarithmique.	29
3.8	Graphiques des fonctions sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus et arctangente.	30
3.9	Graphiques des fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique, arcsinu hyperbolique, arccosinus hyperbolique et arctangente hyperbolique. . . .	31

3.10 Développement en série de la fonction $\sin(x)$ et son évolution en fonction du nombre de termes retenus dans le développement. Les trois panneaux correspondent à des développements autour de 0, 1 et 2, respectivement. Chacune des courbes correspond à l'ajout d'un terme dans la série, de 1 à 10. Les cercles correspondent à la valeur réelle de la fonction $\sin(x)$ 35

3.11 Evaluation de la dérivée de la fonction $\ln(x)$ par différence finie, en utilisant un échantillonnage de $\epsilon = 0.1$ (cercles) et de $\epsilon = 0.01$ (croix). La solution analytique $1/X$ est représentée par la courbe fine. 37

3.12 Evaluation de la vitesse d'augmentation de température moyenne annuelle à partir d'une série de données (cercles ouverts). La série est d'abord lissée par moyenne glissante (courbe fine) et sa dérivée est obtenue par "différence finie" (courbe épaisse). On voit clairement l'accélération du réchauffement depuis la seconde guerre mondiale. 38

3.13 Interprétation graphique de l'intégrale. La valeur de l'intégrale de la fonction $f(x)$ (trait gras) entre les bornes a et b (trait verticaux pointillés) est égale à l'aire de la surface grisée comprise entre la fonction et l'axe des s 43

3.14 Deux manières approximatives d'intégrer une fonction, $f(x)$, connue en un nombre fini de points, $x_i, i = 1, \dots, N$. (a) Méthode des rectangles et (b) méthode des trapèzes. 44

3.15 Carte topographique. Contours sont donnés pour des valeurs de la topographie espacés de 20m. 51

3.16 Géométrie d'un cylindre a base circulaire. Petit volume (infinitésimal) à intégrer sur les valeurs possibles de r, α et z 52

5.1 Cercle de rayon R ; relation entre l'angle a formé par la droite reliant un point P et l'axe des x et la projection de ce point sur l'axes des x , correspondant au cosinus de l'angle a et la projection sur l'axe des y , correspondant au sinus de l'angle. A noter également que la longueur de l'arc de cercle soutenu par l'angle a est égale à l'angle a exprimé en radians. 72

5.2 Convention d'appellation des angle et côtés d'un triangle quelconque utilisée dans le texte. 74

5.3 Géométrie d'un prisme orogénique. Trois cas sont considérés en ce qui concerne le pendage des structures majeur bordant ce prisme. Voir les détails dans le texte. 76

5.4 Un triangle sphérique quelconque reliant trois points à la surface de la Terre. Les côtés de ce triangle - A, B et C - sont exprimés en termes des angles qu'ils forment vu du centre de la Terre. Les angles a, b et c sont les angles que forment les côtés du triangle sphérique entre eux à la surface de la Terre. 78

5.5 Les trois types de projections cartographiques, cylindrique, conique et azimutale. 80

5.6 (a) Représentation des directions mesurées sur une sphère; (b) diagramme polaire résultant de la projection des points définissant les directions mesurées de la sphère au plan horizontal orienté; (c) détermination de l'orientation (pendage et azimut) du plan de faille. 82

5.7 (a)-(d) Comment représenter des mesures de directions tri-dimensionnelles sur un abaque équatorial et comment en déduire (e) le pendage et (f) la direction du pendage maximum. 83

5.8	Une direction (N_x, N_y, N_z) peut être également représentée par deux angles.	85
5.9	a) Une ellipse. b) Une parabole. c) Une hyperbole. d) Deux plans sécants. e) Deux plans parallèles.	89
5.10	Un ellipsoïde.	90
5.11	a) Un parabololoïde elliptique. b) Un parabololoïde hyperbolique	91
5.12	a) Un hyperbololoïde à une nappe. b) Un hyperbololoïde à deux nappes.	92
5.13	a) Un cône. b) Un cylindre.	93
5.14	Un triangle dont on connaît la longueur d'un côté et deux de ses angles. Comment calculer la longueur des deux autres côtés?	95
5.15	Une triangulation. Comment, à partir de la connaissance de la longueur d'un des côtés d'un triangle (trait gras) peut-on déterminer toutes les autres longueurs/distance, en ne mesurant que des angles?	96
5.16	Les deux angles définissant un plan en géologie (en français et en anglais).	97
6.1	Comment calculer le déterminant d'une matrice de 3×3 et de 2×2	100
6.2	Les composantes du tenseur des contraintes.	102
7.1	Histogramme illustrant la distribution des âges donnés en Tableau 7.1.	118
7.2	Histogramme de la distribution de la probabilité des âges donnés en Tableau 7.1.	118
7.3	Distribution normale obtenue à partir de la moyenne et de l'écart type estimés à partir des âges donnés en Tableau 7.1.	119
7.4	Données de température en fonction de la profondeur dans le puits et régression linéaire correspondante donnant une pente (géotherme de surface) de $31 \text{ }^\circ\text{C/km}$ et une température à la surface de 18.7°C	122
9.1	Approximation de la fonction $\ln x$ par un développement en série de Taylor. Les cercles représentent la valeur exacte de la fonction. Les courbes se rapprochant progressivement de cette valeur correspondent à des développements contenant de plus en plus de termes (de 1 à 5).	143
9.2	Vecteurs représentant le gradient topographique.	145
9.3	Intersections entre les courbes de niveau et le thalweg de la rivière.	146
9.4	Profil de la rivière principale. La courbe en escaliers fine est le résultat de la mesure sur la carte. La courbe grasse correspond a été obtenue par lissage.	147
9.5	Géotherme crustal.	151
9.6	Données d'azimut et de pendage du Tableau 5.5.	158
9.7	Positionnement des axes par rapport au plan de faille et au point de forage.	160
9.8	Histogramme des mesures de pendage données dans le tableau 7.6.	168
9.9	Histogramme des mesures d'âges données dans le tableau 7.7.	168
9.10	Données provenant du Tableau 7.8 et la régression linéaire qui en découle.	169
9.11	Données sur le nombre d'arbres morts par jour et la régression linéaire correspondante.	171
10.1	Débit de la Seine à Paris.	181

Liste des tableaux

3.1	Exemple de fonction, de leurs dérivée et des unités de cette dérivée	25
3.2	Exemples de fonctions et de leurs dérivées	28
3.3	Exemples de fonctions et de leurs primitives	42
3.4	Température à Lyon	50
3.5	Flux d'arsenic dans la rivière Fly	53
5.1	Relations de trigonométrie	74
5.2	Relations de trigonométrie	75
5.3	Projections couramment utilisées, leurs types et propriétés.	80
5.4	Paires de villes entre lesquels on devra calculer la distance à la surface de la Terre. . .	96
5.5	Mesures de pendage et d'azimut (en degrés).	97
7.1	Données thermochronologiques (âges sont en Ma)	114
7.2	Moyennes successives. n est le nombre d'échantillons utilisés pour calculer la moyenne	115
7.3	Données thermochronologiques en ordre croissant	116
7.4	Valeurs de la fonction $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$	120
7.5	Données température-profondeur	121
7.6	Angles mesurés	125
7.7	Âges U/Pb mesurés	125
7.8	Données géochimiques provenant du fleuve Mékong.	126
9.1	Température et accélération de la température à Lyon	147