Université Joseph Fourier, site de Valence
Mat233, année 2014/2015
Devoir surveillé du 7 octobre 2014, durée : 1 heure 30

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

Dans ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$. On note 0_E le vecteur nul de E.

1. Démontrer la propriété suivante :
   si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est une famille libre de* E*, alors pour tout vecteur* $v \in \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$*, il existe des* *<u>uniques</u>* *réels* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *tels que* $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$.

2. Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ de dimension $\dim(G) = \dim(H) = 2$. On suppose que $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est une base de E, où $\{u_1, u_2\}$ est une base de G et $\{v_1, v_2\}$ une base de H. Que peut-on dire sur la somme $G + H$? Vous justifierez votre réponse.

3. Soient $\mathcal{B}_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}_w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ des bases respectives de E et F. Rappeler brièvement comment on obtient la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_v \to \mathcal{B}_w}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_w$ de l'application linéaire $f : E \to F$.

4. (a) Les applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ci-dessous sont-elles linéaires ?
   $$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix} \quad , \quad g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2x \end{pmatrix}$$
   (b) Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 suivants définissent une base de $\mathbb{R}^2$:
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
   (c) Déterminer les images de v_1 et v_2 par f et par g. Si ces applications sont linéaires, donner leur matrice dans la base $\{v_1, v_2\}$.

5. Rappeler la définition du noyau $\ker(f)$ d'une application linéaire $f : E \to F$. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

6. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la démonstration de la propriété :
   f *est injective si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$.

7. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer les propriétés :
   (a) *si* f *est injective et* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est une famille libre de* E*, alors* $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ *est une famille libre de* F*;*
   (b) *si* f *est surjective et* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est une famille génératrice de* E*, alors* $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ *est une famille génératrice de* F.

   Si f est bijective, que peut-on en déduire sur les dimensions de E et F ?

8. Énoncez (sans le démontrer) le théorème du rang.

9. Remplacer les $*$ dans la matrice suivante par des nombres de telle sorte que cette matrice soit de rang 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 2 \\ 0 & * & * \\ -1 & 1 & * \end{pmatrix}$$