Université Joseph Fourier, site de Valence
Mat233, année 2015/2016
Devoir surveillé du 29 septembre 2015, durée : 1 heure

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On note 0_E le vecteur nul de E.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :
   (a) $F \cap G$
   (b) $F + G$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les deux affirmations (i) et (ii) sont équivalentes :
   (i) *$H = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$;*
   (ii) *Tout vecteur w de H se décompose <u>de manière unique</u> en une somme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.*
3. Donner la définition d'une *famille libre* de vecteurs de E.
4. Les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.
5. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Rappeler la définition du noyau $\ker(f)$ de f. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
6. (a) Montrer que l'application suivante de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix} .$$
   (b) Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_e}(f)$ de f dans la base canonique
$$\mathcal{B}_e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$
   (a) Montrer que
$$\mathcal{B}_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer les composantes dans la base $\mathcal{B}_v$ de $f(v_1)$ et de $f(v_2)$.
   (d) Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_v}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}_v$.