Contrôle continu MAT233 novembre 2013.
Attention, la feuille est recto-verso

Aucun document ni calculatrice

Exercice 1 :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.
2. Calculer l'inverse A^{-1} de A.
3. Calculer l'inverse A^{-2} de A^2.
4. Posons
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Calculer le produit BC de B et de C.
6. Calculer le determinant de BC.

Exercice 2 :

On considère les trois vecteurs $b_1 = (1, -1, 0, 0), b_2 = (0, 1, -1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de l'espace vectoriel $V = \text{vect}(b_1, b_2, b_3)$ engendré par b_1, b_2, b_3.
2. Montrer que $v = (1, 2, 3, -6)$ appartient à V.
   Posons $b_4 = (1, 1, 1, 1)$.
3. Montrer que $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Trouver les quatre coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 de $v = (3, 4, 6, 7) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ dans la base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.
   Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(b_4) = 3b_4$ et par $f(u) = 2u$ si u appartient au sous-espace $V = \text{vect}(b_1, b_2, b_3)$.

5. Calculer $f(v)$ pour $v = (1, 2, 3, -6)$ comme ci-dessus.
6. Calculer $f(w)$ pour $w = (3, 4, 6, 7)$ comme ci-dessus.
7. Écrire la matrice de f dans la base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.
8. Écrire la matrice de f dans la base canonique $\{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$.

Exercice 3 :

1. Calculer le déterminant de la matrice
$$\begin{pmatrix} 11 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 11 & 11 & 13 & 13 & 13 \\ 11 & 11 & 11 & 13 & 13 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 13 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que le déterminant d'une matrice 6 fois 6 est divisible par $32 = 2^5$ si tous les coefficients sont des entiers impairs.