Université Joseph Fourier, site de Valence
Mat233, année 2013/2014
Examen du 26 juin 2014, seconde session, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Barême indicatif : questions de cours : 4 points, exercice 1 : 2 points, exercice 2 : 5 points, exercice 3 : 3 points, exercice 4 : 6 points.

QUESTIONS DE COURS :

1. Soient E et E' deux espaces vectoriels et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ des bases respectives de E et E'. Donner la définition d'une application linéaire $f : E \to E'$. Rappeler brièvement comment on obtient sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.

2. Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Donner la démonstration de la propriété : f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$ (0_E est le vecteur nul de E).

3. Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible. En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que A et B ont même polynôme caractéristique. En déduire que A et B ont les mêmes valeurs propres.

EXERCICE 1 : Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2a & a+b & a+b & 2b \\ a+b & 2a & 2b & a+b \\ 2b & a+b & a+b & 2a \\ a+b & 2b & 2a & a+b \end{vmatrix}.$$

pour des valeurs réelles quelconques de a et b.

EXERCICE 2 :

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 12 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

   Cette matrice est-elle diagonalisable?

2. Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & 2x - y - 6z \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -6x + 3y + 12z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & 4x - 2y - 9z \end{array} \right.$$

   avec la condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

EXERCICE 3 : Soit $M(x, y)$ un point dans le demi-plan $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ distinct de l'origine $(0, 0)$. Les coordonnées polaires (r, θ) de M sont définies par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) .$$

1. Sur quels intervalles varient r et θ lorsque (x, y) varie dans $D \setminus \{(0, 0)\}$?
   Exprimez x et y en fonction de r et θ.

2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur D. Calculer $r\dfrac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial r}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur D vérifiant l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y) \quad , \quad (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\} .$$

EXERCICE 4 : On se propose d'étudier la fonction f de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = \sin(xy) .$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Quelles sont ses valeurs minimales et maximales?

2. Déterminer les courbes de niveau de f correspondant à $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ et $f(x, y) = -1$. Les tracer dans un repère orthonormé (xOy).

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction d'une variable $F_+ : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, x)$. Même question pour $F_- : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, -x)$.

4. Déterminer toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2 inclu.

5. Calculer le gradient de f au point $M(x, y)$. Vérifier qu'il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par M.

6. Déterminer tous les points (x_0, y_0) pour lesquels f a un extremum local. Pour chacun de ces points, étudier la nature de cet extremum (maximum, minimum ou point selle).