Université Joseph Fourier, site de Valence
Examen de Mat233 du 5 janvier 2015, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Barême indicatif : questions de cours : ~ 4 points, exercice 1 : ~ 7 points, exercice 2 : ~ 5 points, exercice 3 : ~ 8 points.

QUESTIONS DE COURS :

1. Soient $\mathcal{B}_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}_w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ des bases respectives des espaces vectoriels E et F. Rappeler brièvement comment on obtient la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_v \to \mathcal{B}_w}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_w$ de l'application linéaire $f : E \to F$.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont deux espaces vectoriels. Donner la démonstration de la propriété : *f est injective si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$.
3. Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible. En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que A et B ont même polynôme caractéristique. En déduire que A et B ont les mêmes valeurs propres.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Donner l'équation du plan tangent à la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ au point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

EXERCICE 1 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites définies par les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} & = & -2u_n + v_n + w_n \end{array}\right.$$

et $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 1$. Déterminez les valeurs de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 : Pour tout nombre réel m, on considère la matrice réelle

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que quelque soit $m \in \mathbb{R}$, A_m admet la valeur propre $\lambda_1 = 2$. Déterminez les autres valeurs propres de A_m en fonction de m.
2. La matrice A_m est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$ si $m > 0$?
3. On suppose que $m = 0$.
   (a) Montrer que 1 est racine double du polynôme caractéristique de A_0.
   (b) Déterminer le sous-espace propre $\ker(A_0 - \mathrm{Id})$.
   (c) La matrice A_0 est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $m < 0$. Discuter suivant les valeurs de m si A_m est diagonalisable ou non.

EXERCICE 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = 2xy \ .$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (justifiez votre réponse).

2. Déterminer les courbes de niveau $\mathcal{C}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$ pour $c = 1$ et $c = -1$ et les représenter sur un dessin.

3. Tracer les courbes représentatives des fonctions d'une variable $f_x : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, 0)$, $f_y : y \in \mathbb{R} \mapsto f(0, y)$, $f_s : s \in \mathbb{R} \mapsto f(s, s)$ et $f_t : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, -t)$.

4. Calculer toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2 inclu.

5. Déterminer les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ s'annule.

6. On note $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne. Montrer que le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$ s'écrit

$$f(h, k) = \left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}) \ ,$$

   où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Déterminez les valeurs propres et vecteurs propres de A.

8. En déduire qu'il existe deux vecteurs orthogonaux $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ de normes $\|v\| = \|w\| = 1$ tels que pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$f(tv_1, tv_2) = t^2 + \mathcal{O}(t^3) \qquad \text{et} \qquad f(tw_1, tw_2) = -t^2 + \mathcal{O}(t^3) \ .$$

   En conclure que f admet un point col à l'origine $(0, 0)$.

9. Représentez sur un dessin la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$.