Université Joseph Fourier, site de Valence
Mat233, année 2013/2014
Examen du 6 janvier 2014, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Barême indicatif : questions de cours : 4-5 points, exercice 1 : 6 points, exercice 2 : 4 points, exercice 3 : 7 points, exercice 4 : bonus 3-4 points.

QUESTIONS DE COURS :

1. Soient E et E' deux espaces vectoriels et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ des bases respectives de E et E'. Donner la définition d'une application linéaire $f : E \to E'$. Rappeler brièvement comment on obtient sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.
2. Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Donner la démonstration de la propriété : f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$ (0_E est le vecteur nul de E).
3. Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible. En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que A et B ont même polynôme caractéristique. En déduire que A et B ont les mêmes valeurs propres.
4. Donner la définition de la différentiabilité en un point intérieur x_0 au domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ de la fonction de n variables $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Énoncez (sans la démontrer) une condition suffisante sur les dérivées partielles permières de f pour que f soit différentiable en x_0.

EXERCICE 1 :

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & -x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2x - 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & 2x - y \end{array} \right.$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

EXERCICE 2 : Soit $n > 0$ un entier et N une matrice $n \times n$ satisfaisant la propriété suivante :

$$\text{il existe un entier } k > 0 \text{ tel que } N^k = 0_n\,, \qquad (1)$$

où 0_n désigne la matrice nulle $n \times n$.

1. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
satisfait la propriété (1).

2. Montrer que si N satisfait (1) et admet λ comme valeur propre, alors $\lambda = 0$.

3. En déduire que si N satisfait (1) et $N \neq 0_n$, alors N n'est pas diagonalisable.

4. On suppose que $N^n = 0_n$ et $N^{n-1} \neq 0_n$. Soit f l'application linéaire de matrice N dans la base canonique et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $N^{n-1}v$ n'est pas égal au vecteur nul. Vous admettrez que la famille $\mathcal{B}_v = \{v, Nv, N^2v, \ldots, N^{n-1}v\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_v$.

EXERCICE 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par
$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 \ .$$

1. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = r^4 - 2r^2$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (b) En déduire que si $c > 0$, les courbes de niveau $\mathcal{C}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$ de f sont des cercles, dont vous déterminerez le centre et le rayon en fonction de c.
   (c) Déterminer les courbes de niveau $\mathcal{C}_c$ pour $-1 < c < 0$, pour $c = 0$ et pour $c = -1$.

2. Donner le tableau de variation de la fonction d'une variable $F(r) = r^4 - 2r^2$ sur $[0, \infty[$. Cette fonction F admet-elle un extremum local sur $]0, \infty[$? Si oui, en quel point r ?

3. Déterminer tous les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels le gradient $\nabla f|_{(x_0,y_0)}$ est nul.

4. Donner les développements de Taylor de f jusqu'à l'ordre 2 aux points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. La fonction f admet-elle un extremum local en ces points ? Si oui, préciser sa nature (maximum, minimum ou point selle).

5. Représenter grossièrement la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$. Vous tracerez sur votre dessin la courbe représentative de la fonction F dans le plan (yOz).

EXERCICE 4 (bonus): On considère la fonction g de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par
$$g(x, y) = \frac{\ln(1 - xy)}{x^2 + y^2} \ .$$

1. Déterminer le (plus grand) domaine de définition $\mathcal{D}$ de g et le représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$.

2. g est-elle continue en $(0, 0)$?

3. Calculer quand elles existent les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.