Université Joseph Fourier, site de Valence

Année 2015-2016, Mat233

Feuille de TD n°4

Exercice 1 : Etudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$$

Exercice 2 : La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Sur quel domaine de $\mathbb{R}^2$ admet-elle une dérivée partielle par rapport à x ? par rapport à y ?.

Exercice 3 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, .admet des dérivées partielles premières par rapport à x et à y sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, mais que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'existent pas en $(0,0)$.

Exercice 4 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ mais ne sont pas continues au point $(0,0)$.
3. On pose $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\dfrac{\left(f(h,h) - h\left\langle \nabla f\,|_{(0,0)}, v\right\rangle\right)}{h}$ ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0. En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5 : On considèreune fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y de chacune des fonctions suivantes :

$$(1) \quad (x,y) \longmapsto g(x,y) = f(y,x) \quad ; \quad (2) \quad (x,y) \longmapsto h(x,y) = f(y, f(x,x))$$

et la dérivée de la fonction h définie par :

$$x \longmapsto h(x) = f(x,x)$$

Exercice 6 : On se propose d'étudier la fonction gaussienne g de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \exp\left(-x^2-y^2\right)$$

1. g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Tracer les courbes de niveau de g.
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions d'une variable définies par :

$$G_1 : x \longmapsto G_1(x) = g(x,0) \quad ; \quad G_2 : y \longmapsto G_2(y) = g(0,y) \quad ; \quad H : u \longmapsto H(u) = g(u,u)$$

4. Déterminer les dérivées partielles premières de g.

5. Calculer le gradient de g au point $M_0(x_0, y_0)$ et vérifier qu'il est orthogonal à la courbe de niveau de g passant par M_0.

Exercice 7 : Mêmes questions avec les fonctions g définies par :

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \sin(xy)$$

puis

$$(x,y) \longmapsto h(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1+x}\right)$$

Exercice 8 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 9 : Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine que l'on précisera, et trouver leurs développements de Taylor à l'ordre 2 en un point (x_0, y_0) :

1. $(x,y) \longmapsto f(x,y) = e^x \sin(x+y)$ pour $(x_0,y_0) \neq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. $(x,y) \longmapsto g(x,y) = x \ln y - y \ln x$ pour $(x_0,y_0) = (1,1)$

Exercice 10 : Trouver l'ensemble des points (x_0, y_0) en lesquels les fonctions g des exercices 6 et 7 ont un extremum local. Déterminer la nature de cet extremum (maximum ou minimum).

Exercice 11 : Etudier les extrema locaux éventuels des fonctions de deux variables suivantes :

1. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_1(x,y) = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$;

2. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_2(x,y) = x^3 + y^3$;

3. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_3(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$;

4. $(x,y) \in [-1;1]^2 \longmapsto f_4(x,y) = x^2 + y^2 + \sin\left(x^2+y^2\right)$.

Dans chacun des cas on indiquera la nature de l'extremum trouvé.

Exercice 12 : On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant, pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(u,v) = f(u+v, u-v)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

2. En déduire l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation (1).

Exercice 13 : On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On définit le Laplacien de f par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $F(r,\theta) = f(x,y)$ où r et θ sont les coordonnées polaires de $M(x,y)$.

Déterminer Δf en fonction des dérivées partielles premières et secondes de F.