Université Joseph Fourier, site de Valence

Année 2015-2016, Mat233

Feuille de TD n°3

Diagonalisation d'endomorphismes

Exercice 1 :

Déterminer les valeurs propres et, s'il en existe une, une base de vecteurs propres de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que deux vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
On convient de les normaliser pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres.
Ecrire la matrice P de passage de la base canonique à cette base.

3. Montrer que $({}^tP)\, P = I_3$. Calculer le produit $P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?

4. Calculer $\det A$.

5. Calculer A^{1000} et A^{-1}.

6. Résoudre le système

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

où v_1, v_2 et v_3 sont trois réels quelconques.

Exercice 3 : Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes, et dire si elles sont diagonalisables.

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : On considère deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 5 : On considère deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de dimension n qui vérifient $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que g admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et à g.

2. En déduire que $f = a_{n-1}g^{n-1} + \ldots + \ a_1 g + a_0 Id_E$ où g^k est la composée $\underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ facteurs}}$.

Indication : on pourra montrer que cette égalité est équivalente à un système de n équations à n inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dont le déterminant est un déterminant de Van der Monde.

Exercice 6 : On considère f un endomorphisme de rang 1 d'un espace de dimension n.

Déterminer les valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
On rappelle que la trace de f est égale à la somme de ses valeurs propres.

Exercice 7 : On considère A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, de même multiplicité que λ.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
puis une base de vecteurs propres de A dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 8 : On considère un réel m, et la matrice A_m définie par :
$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_m , puis une base de vecteurs propres

2. Déterminer, suivant les valeurs de m, le rang de A_m. Déterminer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A_m^{-1}.

3. Lorsque A_m n'est pas inversible, déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 9 : On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de k, la dimension de $\ker f$.

2. Démontrer que M admet une valeur propre réelle entière, indépendante de k, puis déterminer toutes les valeurs propres de M.

3. Indiquer toutes les valeurs de k pour lesquelles la matrice M possède des valeurs propres multiples.

Pour quelles valeurs de k la matrice M est-elle semblable à une matrice diagonale ?

Exercice 10 : On définit, pour a et b réels, la matrice A par :
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout entier n.

Exercice 11 : On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A

2. Trouver une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que
$$Mat\,(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On note g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
   a. Montrer que $\ker\,(f - 2Id)$ et $\ker\,(f - 2Id)^2$ sont stables par g.

b. En déduire que $Mat\,(g, \mathcal{B}')$ est de la forme :

$$Mat\,(g, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Préciser les valeurs possibles des réels $a, b, c,$ et d.

Exercice 12 : On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 0$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée que l'on précisera.

2. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice 13 : Résoudre les deux systèmes différentiels :

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$