Université Joseph Fourier, site de Valence

Année 2015-2016, Mat233

Feuille de TD n$^\circ$2

Déterminants

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 2 :

On considère F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Déterminer $\det s$.

Exercice 3 : Calculer les déterminants suivants , où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

4.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

Exercice 4 : Même question pour les déterminants suivants :

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

Exercice 5 : Démontrer, sans le calculer, que le nombre

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13×8. (on pourra d'abord remarquer que les nombres 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

Exercice 6 : Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 7 : Calculer, par récurrence pour $n \geq 2$, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde d'ordre n