Université Joseph Fourier, site de Valence

Année 2015-2016, Mat233

Feuille de TD n°1

Exercice 1 : On donne les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y-z=x+y+z=0\right\} \quad , \quad E_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2-z^2=0\right\} \\ E_3 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ e^x e^y=0\right\} \quad , \quad E_4=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 3x-2y+z=0\right\} \\ E_5 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z\left(x^2+y^2\right)=0\right\} \quad , \quad E_6=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y+1\geq 0\right\} \end{aligned}$$

Parmi ces ensembles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
S'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, en donner une base et préciser sa dimension.

Exercice 2 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la famille de vecteurs : $\mathcal{F}_1=\{e_1=(3,2)\,,e_2=(4,1)\,,e_3=(-5,2)\}$. Est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance entre e_1, e_2 et e_3.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec la famille $\mathcal{F}_2=\{e_1=(9,3,7)\,,e_2=(1,8,8)\,,e_3=(5,5,1)\}$.
3. Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec la famille $\mathcal{F}_3=\{e_1=(3,2,1,4)\,,e_2=(4,1,-1,5)\,,e_3=(-5,2,1,-1)\,,e_4=(6,-3,-3,2)\}$.

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs :

$$e_1=(1,1,1) \quad , \quad e_2=(1,1,2) \quad , \quad e_3=(1,2,3)$$

1. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer dans cette base les coordonnées de $v=(5,7,12)$

Exercice 4 : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de base (e_1,e_2,e_3), on donne les familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1=\{e_1+e_2,e_2+e_3,e_3+e_1\} \qquad \mathcal{F}_2=\{e_1-e_2,e_2-e_3,e_3-e_1\}$$

$$\mathcal{F}_3=\{e_1+e_2,e_2-2e_3\} \qquad \mathcal{F}_4=\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,2e_1+e_2-e_3\}$$

Sont-elles libres dans E ? Génératrices de E ?

Exercice 5 : Peut-on déterminer les réels x et y pour que le vecteur $v=(2,x,y,3)$ appatienne au sous-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{R}^4$ par $\{e_1=(1,1,1,2)\,,e_2=(1,2,3,1)\}$?

Exercice 6 : Dans $\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs :

$$e_1=(1,2,3,4) \quad , \quad e_2=(1,1,1,3) \quad , \quad e_3=(2,1,1,1) \quad , \quad e_4=(1,0,1,2) \quad , \quad e_5=(2,3,0,1)$$

On pose $E=Vect\,(e_1,e_2,e_3)$ et $F=Vect\,(e_4,e_5)$.

Déterminer les dimensions respectives de E, F, $E\cap F$ et $E+F$.

Exercice 7 : Discuter, suivant la valeur du réel x, le rang de la famille de vecteurs :

$$\{e_1=(1,x,-1) \quad , \quad e_2=(x,1,x) \quad , \quad e_3=(-1,x,1)\}$$

Exercice 8 : Dans $E=\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs :

$$e_1=(1,1,0,0) \quad , \quad e_2=(0,1,1,0) \quad , \quad e_3=(1,1,0,1) \quad , \quad e_4=(1,0,0,0) \quad , \quad e_5=(1,1,1,1)$$

et l'on pose $F=vect\,\{e_1,e_2\}$, $G=vect\,\{e_3,e_4\}$ et $G'=vect\,\{e_3,e_4,e_5\}$.

1. Montrer que $E=F\oplus G$.
2. A-t-on $E=F\oplus G'$?

Exercice 9 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{array}{lllll} f_1 & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & , & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & , & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & , & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 & : & \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 & , & f_4(P) = (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

Dans le cas où elles sont linéaires, déterminer leur matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

Exercice 10 : On considère un espace vectoriel E de dimension n, et ϕ une application linéaire de E dans E telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$.
Si x est un élément de E tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0_E$, montrer que la famille $\left\{x,\ \phi(x),\ \phi^2(x),\ \ldots,\ \phi^{n-1}(x)\right\}$ est une base de E.

Exercice 11 : Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x,y,z) = (z, x-y, y+z)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. (C'est-à-dire une application linéaire bijective).

Exercice 12 : Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même canoniquement associées à chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice 13 : Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Exercice 14 : On considère un espace vectoriel E dont une base est (e_1, e_2) , et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 - e_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2$$

On pose $u_1 = 2e_2 - e_1$ et $u_2 = e_1 + 2e_2$. Vérifier que (u_1, u_2) est une base de E, puis exprimer la matrice de f dans cette base.

Exercice 15 : On donne

$$v_1 = (1,0,1) \quad , \quad v_2 = (1,1,0) \quad , \quad v_3 = (-1,-1,1)$$

1. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3) .
3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, v_3) .

Exercice 16 : Pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on considère l'application linéaire $f_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquelles $f_{\alpha,\beta}$ est surjective.